

# APPROXIMATION DIOPHANTINNE SUR UNE COURBE ELLIPTIQUE :

Bakir FARHI

Département de Mathématiques, Université du Maine,  
Avenue Olivier Messiaen, 72085 Le Mans Cedex 9, France.  
Bakir.Farhi@univ-lemans.fr

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Notations et résultats</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Paramétrisation locale de <math>\tilde{E}</math></b>	<b>10</b>
<b>4</b>	<b>Plongements éclatants</b>	<b>13</b>
<b>5</b>	<b>Paramétrisation locale de l'image de <math>E^m</math> dans <math>\mathbb{P}_2^{2m-1}</math></b>	<b>15</b>
<b>6</b>	<b>La fonction auxiliaire</b>	<b>20</b>
<b>7</b>	<b>Translatée de la fonction auxiliaire</b>	<b>24</b>
<b>8</b>	<b>Extrapolation</b>	<b>30</b>
<b>9</b>	<b>Inégalité de la hauteur à la Vojta</b>	<b>39</b>
9.1	Premier théorème : . . . . .	39
9.2	Choix des paramètres $\varepsilon_0, \varepsilon_1$ et $\alpha$ : . . . . .	43
<b>10</b>	<b>Inégalité de la hauteur à la Mumford</b>	<b>45</b>
10.1	Construction des fonctions auxiliaires : . . . . .	46
10.2	Extrapolation : . . . . .	50
10.3	Démonstration du théorème 10.1 : . . . . .	51
<b>11</b>	<b>Démonstration des théorèmes 2.1, 2.2 et 2.3</b>	<b>53</b>
11.1	Décompte des points de hauteurs assez grandes : . . . . .	53
11.2	Décompte des points de hauteurs assez petites : . . . . .	55
11.2.1	Première méthode : . . . . .	55
11.2.2	Deuxième méthode : . . . . .	57
11.3	Démonstration des deux premiers théorèmes principaux : . . . . .	58
11.4	Démonstration du troisième théorème principal : . . . . .	59
<b>12</b>	<b>Démonstration des corollaires 2.4, 2.5 et 2.6</b>	<b>60</b>
<b>13</b>	<b>Formulaire</b>	<b>64</b>
13.1	Formules d'addition sur $E$ : . . . . .	64
13.2	Formules de multiplication d'un point de $E$ par un entier positif donné : 66	
13.3	Une valeur admissible pour la constante de comparaison entre hauteur projective et hauteur de Néron-Tate	

**14 Appendice**  
BIBLIOGRAPHIE92

**78**

# 1 Introduction

Notre but ici est de donner un analogue du théorème 2 de [Fa2] dans le cas particulier où la variété abélienne  $A$  est une courbe elliptique et la sous-variété  $E$  de  $A$  est réduite au point à l’infini de cette courbe elliptique (voir ci-dessous). L’intérêt est de fournir une preuve plus élémentaire (utilisant les polynômes au lieu des sections) et en plus donnant une estimation explicite pour le nombre de points exceptionnels en question.

Soit  $K$  un corps de nombres,  $A$  une variété abélienne définie sur  $K$  et  $E$  une  $K$ -sous-variété de  $A$ . Soit aussi  $w$  une place de  $K$ , pour  $x \in A(K)$ , on peut définir sa hauteur multiplicative  $H(x)$  (après avoir choisi un diviseur ample sur  $A$ ) comme on peut définir aussi la distance  $w$ -adique  $d_w(x, E)$  de  $x$  à  $E$  (voir §2). Rappelons d’abord le théorème 2 de [Fa2] :

**Théorème** (G. Faltings) *Pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour presque<sup>1</sup> tout point  $K$ -rationnel  $x \in A - E$  on a :  $d_w(x, E) \geq H(x)^{-\varepsilon}$ .*

# 2 Notations et résultats

Soit  $E \hookrightarrow \mathbb{P}_2$  une courbe elliptique définie sur un corps de nombres  $K$ , plongée (à la Weierstrass) dans l’espace projectif  $\mathbb{P}_2$  et d’équation projective :

$$Y^2Z = 4X^3 - g_2XZ^2 - g_3Z^3 \quad (g_2, g_3 \in K) ,$$

nous prenons le point à l’infini  $\mathbf{0}$ , représenté dans  $\mathbb{P}_2$  par les coordonnées  $(0, 1, 0)$ , comme élément neutre de  $E$ . Soit aussi  $\tilde{E}$  la courbe affine  $\tilde{E} := E \cap \{Y \neq 0\}$  qu’on peut plonger dans  $\mathbb{A}_2$  grâce au morphisme :

$$\begin{aligned} \pi: \quad \tilde{E} &\longrightarrow \mathbb{A}_2 \\ (x : y : z) &\longmapsto \left( \frac{x}{y}, \frac{z}{y} \right) \end{aligned}$$

$\pi(\tilde{E})$  est alors d’équation :  $\tilde{G}(X, Z) = 0$  avec  $\tilde{G}(X, Z) := Z + g_2XZ^2 + g_3Z^3 - 4X^3$ . Posons aussi  $\tilde{\Delta}(X, Z) := \frac{\partial \tilde{G}}{\partial Z}(X, Z) = 3g_3Z^2 + 2g_2XZ + 1$ ,  $\tilde{G}$  et  $\tilde{\Delta}$  sont donc des polynômes de  $K[X, Z]$ . Par ailleurs notons respectivement par  $A(E)$  et  $A(\tilde{E})$  les anneaux de coordonnées de  $E$  et  $\tilde{E}$ , par  $K(E)$  et  $K(\tilde{E})$  les corps de fractions de  $A(E)$  et  $A(\tilde{E})$  et par  $K(E)_0$  les éléments homogènes de degré 0 de  $K(E)$ .

Maintenant, pour toute place  $v$  de  $K$ , on note par  $M_v$  et  $m_v$  les deux réels positifs :

$$\begin{aligned} M_v &:= \max \{1, |g_2|_v, |g_3|_v\} \\ m_v &:= \log M_v \end{aligned}$$

et par  $\eta$  le réel positif :

$$\eta := h(1 : g_2 : g_3) = \sum_{v \in M_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} m_v.$$

On note aussi par  $c_v$  la constante absolue :

$$c_v := \begin{cases} 0 & \text{si } v \text{ est finie} \\ 16 & \text{si } v \text{ est infinie} \end{cases}.$$

Si  $P$  est un polynôme à une ou plusieurs indéterminées à coefficients dans  $K$ , désignons par  $H_v(P)$  (resp  $L_v(P)$ ) le maximum (resp la somme) des valeurs absolues  $v$ -adiques de tous les coefficients de  $P$ . Si de plus  $P$  est non identiquement

<sup>1</sup>Le mot presque veut dire ici “à l’exception d’un nombre fini de points”.

nul, on désigne par  $h_v(P)$  et  $\ell_v(P)$  les deux nombres réels :

$$\begin{aligned} h_v(P) &:= \log H_v(P) \\ \ell_v(P) &:= \log L_v(P). \end{aligned}$$

Plus généralement, si  $F = (P_i)_{i \in I}$  est une famille finie de polynômes à une ou plusieurs indéterminées, à coefficients dans  $K$  et non tous identiquement nuls, on désigne par  $H_v(F)$ ,  $L_v(F)$ ,  $h_v(F)$  et  $\ell_v(F)$  les nombres réels :

$$\begin{aligned} H_v(F) &:= \max_{i \in I} H_v(P_i) \\ L_v(F) &:= \max_{i \in I} L_v(P_i) \\ h_v(F) &:= \max_{i \in I} h_v(P_i) = \log H_v(F) \\ \ell_v(F) &:= \max_{i \in I} \ell_v(P_i) = \log L_v(F) \end{aligned}$$

et on entend par *hauteur de Gauss-Weil* de  $F$  le nombre réel :

$$\tilde{h}(F) := \sum_{v \in M_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} h_v(F).$$

En voici dans ce qui suit quelques propriétés qu'on utilisera souvent dans ce qui va suivre.

#### Quelques propriétés des hauteurs et longueurs locales :

Soient  $P_1, \dots, P_n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) des polynômes de  $K[X_1, \dots, X_d]$  ( $d \in \mathbb{N}$ ) et  $Q$  un polynôme de  $K[Y_1, \dots, Y_n]$ . On a :

1) Pour toute place finie  $v$  de  $K$  :

$$\begin{aligned} H_v(P_1 + \dots + P_n) &\leq \max_{1 \leq i \leq n} H_v(P_i), \\ H_v(P_1 \dots P_n) &\leq \prod_{i=1}^n H_v(P_i). \end{aligned}$$

2) Pour toute place infinie  $v$  de  $K$  :

$$\begin{aligned} H_v(P_1 + \dots + P_n) &\leq n H_v(\{P_1, \dots, P_n\}) \leq n \prod_{i=1}^n \max\{1, H_v(P_i)\}, \\ H_v(P_1 \dots P_n) &\leq \prod_{i=1}^{n-1} \mathcal{N}(P_i) \cdot \prod_{i=1}^n H_v(P_i) \end{aligned}$$

(où on a noté  $\mathcal{N}$  l'application associant à tout polynôme -à coefficients complexes et en un certain nombre d'indéterminées- le nombre de monômes intervenant dans son écriture canonique). De plus :

$$\begin{aligned} L_v(P_1 + \dots + P_n) &\leq \sum_{i=1}^n L_v(P_i), \\ L_v(P_1 \dots P_n) &\leq \prod_{i=1}^n L_v(P_i). \end{aligned}$$

3) Si  $v$  est une place finie de  $K$  :

$$H_v(Q(P_1, \dots, P_n)) \leq H_v(Q) \prod_{i=1}^n H_v(P_i)^{d^{\circ} Y_i Q}$$

et si  $v$  est une place infinie de  $K$  :

$$L_v(Q(P_1, \dots, P_n)) \leq L_v(Q) \prod_{i=1}^n L_v(P_i)^{d^{\circ} Y_i Q}.$$

4) Pour tout  $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  et toute place  $v$  de  $K$  :

$$H_v\left(\frac{1}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \frac{\partial^{|\underline{\alpha}|} Q}{\partial Y_1^{\alpha_1} \dots \partial Y_n^{\alpha_n}}\right) \leq H_v(Q)$$

si  $v$  est finie et :

$$H_v\left(\frac{1}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \frac{\partial^{|\underline{\alpha}|} Q}{\partial Y_1^{\alpha_1} \dots \partial Y_n^{\alpha_n}}\right) \leq \prod_{i=1}^n \binom{d^{\circ} Y_i Q}{\alpha_i} \cdot H_v(Q)$$

si  $v$  est infinie.

On désigne, par ailleurs, par  $\text{dist}_v$  la distance projective  $v$ -adique sur  $\mathbb{P}_2(K)$  définie de la manière suivante :

Pour tous points  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{q}$  de  $\mathbb{P}_2(K)$  représentés respectivement par les deux systèmes projectifs de  $K^3$  :  $\underline{p} = (p_0, p_1, p_2)$  et  $\underline{q} = (q_0, q_1, q_2)$ , on définit :

$$\text{dist}_v(\mathbf{p}, \mathbf{q}) := \frac{\max(|p_0 q_1 - q_0 p_1|_v, |p_0 q_2 - q_0 p_2|_v, |p_1 q_2 - q_1 p_2|_v)}{\max(|p_0|_v, |p_1|_v, |p_2|_v) \cdot \max(|q_0|_v, |q_1|_v, |q_2|_v)}.$$

Cette distance  $\text{dist}_v$  a les deux particularités intéressantes suivantes :

i)  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{P}_2(K)$  on a :  $\text{dist}_v(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \leq 1$ ,

ii)  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{P}_2(K)$  on a :

$\text{dist}_v(\mathbf{x}, \mathbf{0}) < 1 \Rightarrow \mathbf{x} \in \mathbb{P}_2(K) \setminus \{Y = 0\}$  et si  $\underline{x} = (x, 1, z) \in K^3$  est un représentant de  $\mathbf{x}$  alors  $\text{dist}_v(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \max(|x|_v, |z|_v)$ .

En effet, lorsque  $\underline{x} = (x, y, z) \in K^3$  est un représentant d'un point  $\mathbf{x}$  de  $\mathbb{P}_2(K)$ , on a bien :

$$\text{dist}_v(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \frac{\max(|x|_v, |z|_v)}{\max(|x|_v, |y|_v, |z|_v)}.$$

Cette dernière identité entraîne immédiatement les deux propriétés i) et ii) précédentes pour la distance  $\text{dist}_v$ .

Nos résultats principaux sont les suivants :

**Théorème 2.1 (Premier théorème principal)** *Soit  $E$  une courbe elliptique définie sur un corps de nombres  $K$  de degré  $D$ , plongée dans  $\mathbb{P}_2$  à la Weierstrass, d'équation projective  $Y^2 Z = 4X^3 - g_2 X Z^2 - g_3 Z^3$  ( $g_2, g_3 \in K$ ) et d'élément neutre (en tant que groupe) le point à l'infini  $\mathbf{0}$  représenté dans  $\mathbb{P}_2$  par les coordonnées projectives  $(0 : 1 : 0)$ . On désigne par  $r$  le rang de Mordell-Weil de  $E(K)$  que l'on suppose non nul. Soient aussi  $S$  un ensemble fini de places de  $K$ ,  $m_v, c_v$  ( $v \in M_K$ ) et  $\eta$  les réels positifs définis précédemment et  $(\lambda_v)_{v \in S}$  une famille de réels positifs satisfaisant :*

$$\sum_{v \in S} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \lambda_v = 1.$$

Soit enfin  $\varepsilon$  un réel strictement positif  $< \frac{1}{15788}$ . Alors l'ensemble des points  $\mathbf{x}$  de  $E(K)$  satisfaisant le système d'inégalités simultanées :

$$\text{dist}_v(\mathbf{x}, \mathbf{0}) < \exp \left\{ -\lambda_v \left( \varepsilon h(\mathbf{x}) + 56(\eta + 5) \varepsilon^{-1 - \frac{183}{\log |\log \varepsilon|}} \right) - 2m_v - c_v \right\} \quad (v \in S)$$

est de cardinal majoré par :

$$34 \varepsilon^{-1/2} |\log \varepsilon|^{3/2} (\log |\log \varepsilon|)^{-1/2} \left[ 499 \varepsilon^{-1/2} \exp \left( \sqrt{|\log \varepsilon| \cdot \log |\log \varepsilon|} \right) \right]^r.$$

**Théorème 2.2 (Deuxième théorème principal)** Dans la situation du théorème 2.1, en remplaçant l'hypothèse  $\varepsilon < \frac{1}{15788}$  par  $\varepsilon \leq e^{-4/r}$  ; l'ensemble des points  $\mathbf{x}$  de  $E(K)$  satisfaisant le système d'inégalités simultanées :

$$\text{dist}_v(\mathbf{x}, \mathbf{0}) < \exp \left\{ -\lambda_v \left( \varepsilon h(\mathbf{x}) + (\eta + 5) e^{\left( \frac{r}{4} |\log \varepsilon| + 2 \right) (\log |\log \varepsilon| + \log r + 16)} \right) - 2m_v - c_v \right\} \quad (v \in S)$$

est de cardinal majoré par :

$$2r^2 \varepsilon^{-1/2} |\log \varepsilon|^2 (\log r + \log |\log \varepsilon| + 82) \left( 499 \varepsilon^{-1/2} \right)^r.$$

**Théorème 2.3 (Troisième théorème principal)** Sous les mêmes hypothèses que le théorème 2.1 et en désignant de plus par  $E(K)_{\text{tor}}$  le sous-groupe des points de torsion de  $E(K)$ , par  $\hat{h}$  la hauteur de Néron-Tate sur  $E$  définie au paragraphe §13.3 et par  $\hat{h}_{\min}$  la plus petite valeur non nulle des hauteurs de Néron-Tate des points de  $E(K)$  ; l'ensemble des points  $\mathbf{x}$  de  $E(K)$  satisfaisant le système d'inégalités simultanées :

$$\text{dist}_v(\mathbf{x}, \mathbf{0}) < \exp \{ -\lambda_v \varepsilon h(\mathbf{x}) - 2m_v - c_v \} \quad (v \in S)$$

est de cardinal majoré par :

$$\begin{aligned} \#E(K)_{\text{tor}} \left( 1 + \frac{15(\eta + 4) \frac{1}{2} \varepsilon^{-\frac{1}{2} - \frac{92}{\log |\log \varepsilon|}}}{\hat{h}_{\min}^{\frac{1}{2}}} \right)^r + 34 \varepsilon^{-1/2} |\log \varepsilon|^{3/2} (\log |\log \varepsilon|)^{-1/2} \\ \times \left[ 499 \varepsilon^{-1/2} \exp \left( \sqrt{|\log \varepsilon| \cdot \log |\log \varepsilon|} \right) \right]^r. \end{aligned}$$

**Corollaire 2.4 (du théorème 2.1)** Soit  $E$  une courbe elliptique définie sur un corps de nombres  $K$  de degré  $D$ , plongée dans  $\mathbb{P}_2$  à la Weierstrass, d'équation projective  $Y^2Z = 4X^3 - g_2XZ^2 - g_3Z^3$  ( $g_2, g_3 \in K$ ) et d'élément neutre (en tant que groupe) le point à l'infini  $\mathbf{0}$  représenté dans  $\mathbb{P}_2$  par les coordonnées projectives  $(0 : 1 : 0)$ . Soient aussi  $r$  le rang de Mordell-Weil de  $E(K)$  que l'on suppose non nul,  $S$  un ensemble fini de places de  $K$  et  $\varepsilon$  un réel strictement positif  $< \frac{1}{15788}$ . Alors, l'ensemble des points  $\mathbf{x}$  de  $E(K)$  satisfaisant l'inégalité :

$$\prod_{v \in S} \text{dist}_v(\mathbf{x}, \mathbf{0})^{\frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]}} \leq e^{-\varepsilon h(\mathbf{x}) - 57(\eta + 5) \varepsilon^{-1 - \frac{183}{\log |\log \varepsilon|}}}$$

est de cardinal majoré par :

$$\begin{aligned} 34.5^{\text{card}(S)} \left( \frac{2}{\varepsilon} \right)^{1/2} \left( \log \left( \frac{2}{\varepsilon} \right) \right)^{3/2} \left( \log \log \left( \frac{2}{\varepsilon} \right) \right)^{-1/2} \\ \times \left[ 499 \left( \frac{2}{\varepsilon} \right)^{1/2} \exp \left( \sqrt{\log \left( \frac{2}{\varepsilon} \right) \log \log \left( \frac{2}{\varepsilon} \right)} \right) \right]^r. \end{aligned}$$

**Corollaire 2.5 (du théorème 2.2)** *Dans la situation du corollaire 2.4, en remplaçant l'hypothèse  $\varepsilon < \frac{1}{15788}$  par  $\varepsilon \leq e^{-4/r}$ ; l'ensemble des points  $\mathbf{x}$  de  $E(K)$  satisfaisant l'inégalité :*

$$\prod_{v \in S} \text{dist}_v(\mathbf{x}, \mathbf{0})^{\frac{[K_v:\mathbb{Q}_v]}{[K:\mathbb{Q}]}} \leq \exp\left\{-\varepsilon h(\mathbf{x}) - (\eta + 5)e^{\left(\frac{r}{4}|\log \varepsilon| + 2\right)(\log|\log \varepsilon| + \log r + 17)}\right\}$$

*est de cardinal majoré par :*

$$2.5^{\text{card}(S)} r^2 \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \left( \log \left( \frac{2}{\varepsilon} \right) \right)^2 \left( \log r + \log \log \left( \frac{2}{\varepsilon} \right) + 82 \right) \left( 499 \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \right)^r.$$

**Corollaire 2.6 (du théorème 2.3)** *Sous les hypothèses du corollaire 2.4, l'ensemble des points  $\mathbf{x}$  de  $E(K)$  satisfaisant l'inégalité :*

$$\prod_{v \in S} \text{dist}_v(\mathbf{x}, \mathbf{0})^{\frac{[K_v:\mathbb{Q}_v]}{[K:\mathbb{Q}]}} \leq e^{-\varepsilon h(\mathbf{x}) - 2\eta - 16}$$

*est de cardinal majoré par :*

$$5^{\text{card}(S)} \left\{ \#E(K)_{\text{tor}} \left( 1 + \frac{15(\eta + 4)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{2}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2} + \frac{92}{\log \log \left( \frac{2}{\varepsilon} \right)}}}{\widehat{h}_{\min}^{\frac{1}{2}}} \right)^r + 34 \left( \frac{2}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \log \left( \frac{2}{\varepsilon} \right) \right)^{\frac{3}{2}} \left( \log \log \left( \frac{2}{\varepsilon} \right) \right)^{-\frac{1}{2}} \left[ 499 \left( \frac{2}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left( \sqrt{\log \left( \frac{2}{\varepsilon} \right) \log \log \left( \frac{2}{\varepsilon} \right)} \right) \right]^r \right\}.$$

Avant de se lancer dans les détails, décrivons grosso-modo les différentes étapes nous permettant d'aboutir aux résultats :

Nous commençons (§3 qui suit) par paramétriser  $E$  au voisinage d'un point quelconque  $(x : y : z)$  d'une certaine carte de  $E$ , en prenant  $t = \frac{x}{y}$  comme paramètre et en exprimant  $\frac{z}{y}$  comme fonction entière en  $t$ . Au §4 nous introduisons un entier  $m \geq 2$  et des entiers strictement positifs  $a_1, \dots, a_{m-1}$ , à l'aide desquels nous plongeons  $E^m$  dans  $E^m \times E^{m-1}$  comme suit :

$$\begin{aligned} E^m & \xrightarrow{\psi_a} E^m \times E^{m-1} \\ (x_1, \dots, x_m) & \longmapsto (x_1, \dots, x_m, a_1 x_1 - x_m, \dots, a_{m-1} x_{m-1} - x_m) \end{aligned},$$

puis nous plongeons  $E^m \times E^{2m-1}$  dans  $\mathbb{P}_2^{2m-1}$  (plongement de Weierstrass) et nous appelons  $\varphi_a$  le plongement composé. Nous calculons au lemme 2.4.1 -en utilisant le théorème de Wirtinger- les différents multidegrés de  $\varphi_a(E^m)$ . Nous déduisons naturellement de la paramétrisation locale de  $E$ , une paramétrisation locale  $\Omega_a$  de  $\varphi_a(E^m) \hookrightarrow \mathbb{P}_2^{2m-1}$  sur une certaine carte  $\alpha$  contenant  $\{\mathbf{0}\}^{2m-1}$ . Nous avons besoin pour cela d'un système complet de familles de formes représentant l'addition sur  $E$ , lequel est donné dans [La-Ru], et d'une famille de forme représentant la multiplication d'un point de  $E$  par un entier positif donné. Pour cette dernière, nous n'avons pas trouvé de référence donnant des estimations totalement explicites des degrés et hauteurs de ces formules, nous avons donc repris les calculs en suivant [La3], ce qui nous a amené au théorème 2.13.2 (formulaire). Nous avons défini des opérateurs de dérivations  $\partial^{(i_1, \dots, i_m)}(i_1, \dots, i_m \in \mathbb{N})$  sur l'anneau des coordonnées de  $\varphi_a(E^m)$  tels que pour toute forme  $P_1$  sur  $\varphi_a(E^m)$ , l'annulation du coefficient  $u_1^{i_1} \dots u_m^{i_m}$  (où  $u_1, \dots, u_m$  sont les paramètres) dans la série  $\Omega_a(P_1)$  en un certain point équivaut à l'annulation de la forme  $\partial^{(i_1, \dots, i_m)} P_1$  au même point. Nous estimons

ensuite dans le corollaire 2.5.2 les degrés et hauteurs des dérivées d'une forme donnée sur  $\varphi_{\underline{a}}(E^m)$ , en fonction du degré et de la hauteur de cette forme et de  $E$ . Au §6 nous introduisons des paramètres positifs  $0 < \varepsilon_0 < 1/2$ ,  $\varepsilon_1 > 0$  et  $\delta \in \mathbb{N}^*$  (destiné à tendre vers l'infini) avec  $\varepsilon_0\delta \in \mathbb{N}^*$  assez grand et :

$$\frac{m-1}{m!} \left(\frac{7}{3}\right)^m \frac{\varepsilon_1^m}{\varepsilon_0(m+\varepsilon_0)(1+\varepsilon_0)^{m-2}} \leq \frac{1}{2}. \quad (2')$$

Nous construisons par le lemme de Siegel usuel, une forme non identiquement nulle  $P$  sur  $\varphi_{\underline{a}}(E^m)$  de multidegré  $(\varepsilon_0\delta a_1^2, \dots, \varepsilon_0\delta a_m^2, \delta, \dots, \delta)$ , s'annulant en  $\{\mathbf{0}\}^{2m-1}$  avec une multiplicité définie par le dessous d'escalier de  $\mathbb{N}^m$  :

$$T_\delta := \left\{ (\tau_1, \dots, \tau_m) \in \mathbb{N}^m / \frac{\tau_1}{a_1^2} + \dots + \frac{\tau_{m-1}}{a_{m-1}^2} + \frac{\tau_m}{m-1} \leq 7\varepsilon_1\delta \right\}$$

et qui soit de hauteur  $\ll \delta a_1^2$  (où dans tout ce qui suit  $\ll$  veut dire inférieur ou égal à une constante multiplicative près qui ne dépend que de  $E$ ).

En effet, dans le système linéaire de Siegel, les inconnues sont les coefficients de la forme  $P$  à construire et le nombre d'équations est égal au cardinal de l'ensemble  $T_\delta$ . Le nombre d'inconnues est alors la valeur de la fonction de Hilbert de l'idéal  $\mathfrak{J}(\varphi_{\underline{a}}(E^m))$  en  $(\varepsilon_0\delta a_1^2, \dots, \varepsilon_0\delta a_m^2, \delta, \dots, \delta)$ ; comme  $\delta$  et  $\varepsilon_0\delta$  sont supposés assez grands, cette valeur coïncide avec la valeur d'un polynôme de  $Q[\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_m, \underline{Y}_1, \dots, \underline{Y}_{m-1}]$  en  $(\varepsilon_0\delta a_1^2, \dots, \varepsilon_0\delta a_m^2, \delta, \dots, \delta)$  dont la partie homogène dominante est connue explicitement en fonction des multidegrés de  $\varphi_{\underline{a}}(E^m)$  lesquels sont calculés par le lemme 2.4.1. On estime le nombre d'inconnues, puis  $\#T_\delta$  est grossièrement estimé par  $\text{vol}T_\delta$ , qu'on calcule facilement, et afin d'appliquer le lemme de Siegel, on vérifie grâce à (2') que le nombre d'équations est strictement inférieur au nombre d'inconnues.

Au §7, nous introduisons un nouveau paramètre  $0 < \alpha < 1$  et des points  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$  de  $E(K)$ , ordonnés par ordre croissant de leurs hauteurs, que nous supposons contenus dans un petit cône d'angle  $\leq \arccos(1 - \alpha/4)$  de l'espace euclidien  $E(K) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  et de hauteurs assez espacées. Nous posons  $a_i := \lceil |\mathbf{x}_m|/|\mathbf{x}_i| \rceil$  ( $i = 1, \dots, m$ ) de sorte que les points  $\mathbf{y}_i = a_i\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_m$  ( $i = 1, \dots, m-1$ ) soient de hauteurs assez petites en comparaison avec les points  $\mathbf{x}_i$  (la géométrie euclidienne nous donne plus précisément  $\widehat{h}(\mathbf{y}_i) \leq \alpha(a_i^2\widehat{h}(\mathbf{x}_i) + \widehat{h}(\mathbf{x}_m))$ ). Nous posons  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$  et  $\mathbf{y} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{m-1})$  et nous considérons la forme translatée  $\tau_{-\mathbf{y}}^*P$  de notre forme  $P$  construite au §6, par le point  $-\mathbf{y}$ . Celle-ci s'annule en  $\mathbf{y}$  avec la multiplicité définie par le dessous d'escalier  $T_\delta$  et nous pouvons estimer les degrés et les hauteurs des formes dérivées  $\partial^{(i_1, \dots, i_m)} \tau_{-\mathbf{y}}^*P$ . Au §8, nous supposons que les paramètres  $\varepsilon_0, \varepsilon_1$  et  $\alpha$  sont liés par la relation :

$$4m(\varepsilon_0 + 2\alpha) \leq \varepsilon\varepsilon_1, \quad (1')$$

Nous introduisons un ensemble fini  $S$  de places de  $K$  et  $(\lambda_v)_{v \in S}$  une famille de réels positifs satisfaisants :

$$\sum_{v \in S} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \lambda_v = 1.$$

Nous supposons que les points  $\mathbf{x}_i$  satisfont le système d'inégalités simultanées :

$$\forall v \in S, d_v(\mathbf{x}_i, \mathbf{0}) \ll e^{-\lambda_v \varepsilon h(\mathbf{x}_i)}, \quad (\text{S.S})$$

qu'ils sont contenu dans un petit cône d'angle  $\leq \arccos(1 - \alpha/4)$  de  $E(K) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  et que  $\widehat{h}(\mathbf{x}_1) \gg \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_1}$ . Dans l'extrapolation, l'hypothèse principale (S.S), l'hypothèse (1') et l'hypothèse  $\widehat{h}(\mathbf{x}_1) \gg \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_1}$  entraînent que la forme  $\tau_{-\mathbf{y}}^*P$  s'annule en  $(\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})$  avec



la multiplicité définie par le dessous d'escalier  $T_{\delta/2}$  (ceci se démontre en comparant les coefficients des deux séries  $\tau_{-\mathbf{y}}^* P(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_m)$  et  $\tau_{-\mathbf{y}}^* P(\underline{0}, \dots, \underline{0})$  et en utilisant la formule du produit pour chaque coefficient de la série  $\tau_{-\mathbf{y}}^* P(\underline{0}, \dots, \underline{0})$  correspondant à un exposant  $\underline{i} \in T_{\delta/2}$ ). Or, ceci est équivalent à dire que notre forme  $P$  s'annule en  $(-\mathbf{y})$  avec la multiplicité définie par le dessous d'escalier  $T_{\delta/2}$ . Et, en retirant  $P$  en une forme  $Q$  sur  $E^m$ ,  $Q$  s'annule en  $(-\mathbf{x})$  avec la même multiplicité et de plus  $h(Q) \ll \delta a_1^2$ . Au §9 nous arrivons à ce que nous appelons "inégalité à la Vojta" ; en supposant de plus que les points  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$  sont de hauteurs un peu plus grandes  $\widehat{h}(\mathbf{x}_1) \geq (6m^2/\varepsilon_1)^m$  et sont un peu plus espacés  $\widehat{h}(\mathbf{x}_i) \gg m(6m^2/\varepsilon_1)^m \widehat{h}(\mathbf{x}_{i-1})$  (cette condition d'espacement de hauteurs donne l'hypothèse principale du théorème du produit, puisque les  $a_i$  sont inversement proportionnels aux hauteurs des points  $\mathbf{x}_i$ ) et en appliquant le théorème du produit de [Far], on obtient une contradiction avec le fait que  $\widehat{h}(\mathbf{x}_1)$  soit assez grand. Nous déduisons alors le théorème 2.9.1 qui annonce que pour  $\varepsilon_0, \varepsilon_1$  et  $\alpha$  des réels positifs satisfaisant les contraintes (1') et (2') et pour des points  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$  contenus dans un petit cône d'angle  $\leq \arccos(1 - \alpha/4)$ , de hauteurs :

$\widehat{h}(\mathbf{x}_m) \geq \dots \geq \widehat{h}(\mathbf{x}_1) \geq (6m^2/\varepsilon_1)^m$  et satisfaisant le système simultanée (S.S), on a l'une au moins des inégalités :  $\widehat{h}(\mathbf{x}_i) < m(6m^2/\varepsilon_1)^m \widehat{h}(\mathbf{x}_{i-1})$ . Après cela, nous choisissons les paramètres  $\varepsilon_0, \varepsilon_1$  et  $\alpha$  en fonction de  $\varepsilon$  et  $m$  de façon à satisfaire les contraintes (1') et (2'). À une constante absolue ( $< 1$ ) multiplicative près on prend :  $\varepsilon_0 \simeq \varepsilon^{\frac{m}{m-1}}$ ,  $\varepsilon_1 \simeq m\varepsilon^{\frac{1}{m-1}}$  et  $\alpha \simeq \varepsilon^{\frac{m}{m-1}}$  et nous obtenons l'inégalité de la hauteur à la Vojta qui s'énonce : Pour  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$  des points de  $E(K)$  contenus dans un petit cône de  $E(K) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  d'angle  $\leq \arccos(1 - \frac{1}{30976}\varepsilon^{\frac{m}{m-1}})$ , qui sont de hauteurs  $\geq (cte.m)^m \varepsilon^{-\frac{m}{m-1}}$  (avec  $cte$  désigne une constante absolue) et satisfaisant (S.S), on a l'une au moins des inégalités ( $1 < i \leq m$ ) :

$$\widehat{h}(\mathbf{x}_i) < (cte.m)^m \varepsilon^{-\frac{m}{m-1}} \widehat{h}(\mathbf{x}_{i-1}). \quad (\text{I.V})$$

L'inégalité de la hauteur à la Mumford est grosso-modo l'inégalité dans l'autre sens pour  $m = 2$ . Elle s'énonce : Pour  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$  deux points de  $E(K)$  contenus dans un petit cône de  $E(K) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  d'angle  $\leq \arccos(1 - \varepsilon/8)$ , qui sont de hauteurs  $\widehat{h}(\mathbf{x}_2) \geq \widehat{h}(\mathbf{x}_1) \gg \frac{1}{\varepsilon}$  et qui satisfont (S.S), on a :

$$\widehat{h}(\mathbf{x}_2) \geq \left(1 + \frac{1}{3}\sqrt{\varepsilon}\right) \widehat{h}(\mathbf{x}_1). \quad (\text{I.M})$$

On obtient ce théorème (théorème 2.10.1) en suivant les mêmes étapes que pour le théorème 2.9.1, cependant la preuve est ici beaucoup plus simple du fait qu'on n'utilise ni le lemme de Siegel pour construire les fonctions auxiliaires, ni un lemme de zéros à la fin pour conclure. Voilà brièvement comment on fait :

Nous procédons par l'absurde, nous supposons que  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$  ( $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ ) satisfont toutes les hypothèses du théorème mais ne satisfont pas (I.M), ainsi le point  $\mathbf{y} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$  sera de hauteur très petite en comparaison avec  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$  (plus précisément la géométrie euclidienne nous donne  $\widehat{h}(\mathbf{y}) < \frac{\varepsilon}{2} \min\{\widehat{h}(\mathbf{x}_1), \widehat{h}(\mathbf{x}_2)\}$ ). Soit  $\underline{D} = (D_0, D_1, D_2)$  une famille de formes représentant la différence sur  $E$  dans une certaine carte de  $E^2$  contenant  $\{\mathbf{0}\} \times \{\mathbf{0}\}$  et  $\{\mathbf{x}_1\} \times \{\mathbf{x}_2\}$ . Nous introduisons les deux fonctions auxiliaires sur  $E^2$  :

$$\begin{aligned} Q_1(\underline{X}_1, \underline{X}_2) &:= D_0(\underline{D}(\underline{X}_1, \underline{X}_2), \underline{y}) \\ Q_2(\underline{X}_1, \underline{X}_2) &:= D_2(\underline{D}(\underline{X}_1, \underline{X}_2), \underline{y}) \end{aligned}$$

(où  $\underline{y}$  désigne un représentant dans  $\mathbb{P}_2$  du point  $\mathbf{y}$ ).

$Q_1$  et  $Q_2$  s'annulent clairement en  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ . Dans l'extrapolation, si on suppose que l'une des formes  $Q_j$  ( $j = 1, 2$ ) ne s'annule pas en  $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ , en appliquant la formule

du produit au nombre non nul  $Q_j(\mathbf{0}, \mathbf{0})$  de  $K$  et en tenant compte de (S.S), on aboutit à une contradiction avec le fait que  $\widehat{h}(\mathbf{y})$  est très petit relativement à  $\widehat{h}(\mathbf{x}_1)$  et  $\widehat{h}(\mathbf{x}_2)$ . On en déduit que  $Q_1$  et  $Q_2$  doivent s'annuler toutes les deux en  $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ , ce qui entraîne  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ , puis  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$  qui est une contradiction. D'où le théorème 2.10.1. En mettant ensemble les deux inégalités (I.V) et (I.M), on a un décompte de l'ensemble des points de  $E(K)$  satisfaisant (S.S) se situant dans un petit cône de  $E(K) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  et qui sont de hauteurs assez grandes. En effet, en supposant qu'on a  $\ell$  tels points  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_\ell$ , ordonnés selon l'ordre croissant de leurs hauteurs, on partage ces  $\ell$  points en  $m$  paquets de  $k$  points ( $k := \lfloor \frac{\ell-1}{m-1} \rfloor$ , en oubliant éventuellement quelques un des derniers points) et on considère dans chacun de ces paquets le point de plus petite hauteur. On désigne ces derniers par  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m$ . D'après le théorème 2.9.1, (I.V) est satisfaite pour un certain  $\mathbf{y}_j$  ( $j \in \{2, \dots, m\}$ ) et d'après le théorème 2.10.1, (I.M) est satisfaite pour chaque point  $\mathbf{x}_i$  tels que les points  $\mathbf{x}_i$  et  $\mathbf{x}_{i-1}$  soient dans l'intervalle  $[\mathbf{y}_{j-1}, \mathbf{y}_j]$ . Ainsi  $\widehat{h}(\mathbf{y}_j)$  est majoré et minoré en fonction de  $\widehat{h}(\mathbf{y}_{j-1})$  et cette comparaison donne une majoration pour  $k$  puis pour  $\ell$ .

Pour conclure à nos théorèmes principaux (théorèmes 2.2.1, 2.2.2 et 2.2.3), nous recouvrons l'espace euclidien  $E(K) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^r$  (où  $r$  est le rang du groupe de Mordell-Weil de  $E(K)$ ) par un nombre fini de petits cônes, et pour faire le décompte des points de petites hauteurs de  $E(K)$  satisfaisant (S.S), soit on affaiblie (S.S) de façon à ce que le point  $\mathbf{0}$  soit l'unique point de  $E(K)$  de petite hauteur sous (S.S) ou bien on compte tous les points à petite hauteur sans tenir compte de (S.S).

### 3 Paramétrisation locale de $\widetilde{E}$

On paramétrise localement la courbe  $\widetilde{E}$  en utilisant des séries entières. Le théorème de Bézout montre que l'ensemble des points  $(t_1, t_2)$  de  $\widetilde{E}(K)$  pour lesquels  $\widetilde{\Delta}(t_1, t_2) = 0$  est fini et comporte au maximum 6 points. Ainsi la proposition qui suit fournit pour tout point général donné  $(t_1, t_2)$  de  $\widetilde{E}(K)$  (c'est-à-dire pour tout point  $(t_1, t_2)$  de  $\widetilde{E}(K)$  satisfaisant  $\widetilde{\Delta}(t_1, t_2) \neq 0$ ) une paramétrisation de  $\widetilde{E}$  au voisinage de ce point (en spécialisant  $(X, Z)$  en  $(t_1, t_2)$  dans le morphisme  $\widetilde{\tau}$  ci-dessous).

**Proposition 3.1** *Il existe un monomorphisme d'anneaux :*

$$\widetilde{\tau} : A(\widetilde{E}) \longrightarrow K(\widetilde{E})[[t]]$$

tel que :

$$\widetilde{\tau}(X) = X + t \quad \text{et} \quad \widetilde{\tau}(Z) = Z + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\widetilde{\partial^\ell Z}}{\widetilde{\Delta}^{2\ell-1}} t^\ell$$

où les  $\widetilde{\partial^\ell Z}$ ,  $\ell \in \mathbb{N}^*$ , sont des polynômes de  $K[X, Z]$  satisfaisant pour  $T \geq 1$  et pour toute place  $v$  de  $K$  :

$$\max(d^\circ \widetilde{\partial^\ell Z} ; \ell = 0, \dots, T) \leq 3T - 1$$

$$h_v(\widetilde{\partial^\ell Z} ; \ell = 0, \dots, T) \leq \begin{cases} (2T-1)m_v & \text{si } v \text{ est finie} \\ (2T-1)(m_v+4) & \text{si } v \text{ est infinie} \end{cases}.$$

Par conséquent pour tout  $T \geq 1$  on a :

$$\widetilde{h}(\widetilde{\partial^\ell Z} ; \ell = 0, \dots, T) \leq (2T-1)(\eta+4).$$

**Démonstration.**— On considère -durant toute cette démonstration-  $\widetilde{G}$  et  $\widetilde{\Delta}$  comme des éléments de l'anneau de polynômes  $K[\Psi, \Upsilon]$ .

La relation liant  $X$  et  $Z$  (considérés comme éléments de  $A(\widetilde{E})$ ) est évidemment :  $\widetilde{G}(X, Z) = 0$ , donc pour que  $\widetilde{\tau}$  soit un monomorphisme, il faut et il suffit qu'on ait :  $\widetilde{G}(\widetilde{\tau}(X), \widetilde{\tau}(Z)) = \widetilde{\tau}(\widetilde{G}(X, Z)) = 0$ , c'est-à-dire :  $\widetilde{G}(X + t, Z + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\widetilde{\partial^\ell Z}}{\widetilde{\Delta}^{2\ell-1}} t^\ell) = 0$ . Ce qui donne par le développement de Taylor :

$$\sum_{(h,j) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{h!j!} \frac{\partial^{h+j} \widetilde{G}}{\partial \Psi^h \partial \Upsilon^j}(X, Z) t^h \left( \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\widetilde{\partial^\ell Z}}{\widetilde{\Delta}^{2\ell-1}} t^\ell \right)^j = 0.$$

En développant la série du membre de gauche de cette relation et en annulant chacun de ses coefficients, on obtient la relation :

$$\partial^\ell Z = - \sum_{\substack{(h,j) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0), (0,1)\} \\ k_1, \dots, k_j \in \mathbb{N}^* \\ h+k_1+\dots+k_j=\ell}} \widetilde{\Delta}^{2h+j-2} \frac{1}{h!j!} \frac{\partial^{h+j} \widetilde{G}}{\partial \Psi^h \partial \Upsilon^j}(X, Z) \widetilde{\partial^{k_1} Z} \dots \widetilde{\partial^{k_j} Z}. \quad (3.1)$$

Cette dernière relation nous permet de calculer les polynômes  $\widetilde{\partial^\ell Z}$  de proche en proche. Par exemple, pour  $\ell = 1$ , elle donne :

$$\widetilde{\partial^1 Z} = - \frac{\partial \widetilde{G}}{\partial \Psi} = 12\Psi^2 - g_2 \Upsilon^2.$$

Grâce à la relation (3.1), on démontre aisément (par récurrence sur  $\ell$ ) les estimations de la proposition 3.1 pour les degrés et les hauteurs logarithmiques  $v$ -adiques des polynômes  $\widetilde{\partial^\ell Z}$ , dans le cas où  $v$  est une place finie de  $K$  (remarquer que lorsque  $v$  est une place finie de  $K$ , on a :  $h_v(\widetilde{\Delta}) \leq m_v$  et  $\forall (h, j) \in \mathbb{N}^2 : h_v(\frac{1}{h!j!} \frac{\partial^{h+j} \widetilde{G}}{\partial \Psi^h \partial \Upsilon^j}) \leq m_v$ ). Pour obtenir l'estimation de la proposition 3.1 pour les hauteurs logarithmiques  $v$ -adiques des polynômes  $\widetilde{\partial^\ell Z}$ , quand  $v$  est une place infinie de  $K$  ; nous sommes amenés à utiliser un autre type de relation, qui est :

$$\begin{aligned} \widetilde{\partial^{\ell+1} Z} = \frac{1}{\ell+1} \left[ \frac{\partial(\widetilde{\partial^\ell Z})}{\partial \Psi} \widetilde{\Delta}^2 - \frac{\partial(\widetilde{\partial^\ell Z})}{\partial \Upsilon} \frac{\partial \widetilde{G}}{\partial \Psi} \widetilde{\Delta} \right. \\ \left. - (2\ell-1) \widetilde{\partial^\ell Z} \left( \widetilde{\Delta} \cdot \frac{\partial \widetilde{\Delta}}{\partial \Psi} - \frac{\partial \widetilde{G}}{\partial \Psi} \cdot \frac{\partial \widetilde{\Delta}}{\partial \Upsilon} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.2)$$

pour tout  $\ell \geq 1$ . Cette relation s'établit en montrant d'abord par récurrence que si deux fonctions entières (sur un ouvert de  $\mathbb{C}$ )  $F_1$  et  $F_2$  sont liées par une équation du type  $P(F, G) = 0$ , pour un certain polynôme  $P$  de  $\mathbb{C}[\Psi, \Upsilon]$  vérifiant  $\frac{\partial P}{\partial \Upsilon} \neq 0$ , alors on a  $\frac{1}{\ell!} \frac{d^\ell F_2}{dF_1^\ell} = f_\ell(F_1, F_2)$  pour tout  $\ell \geq 1$ , où  $(f_\ell)_{\ell \geq 1}$  est la suite de fonctions de deux variables définie par :

$$\begin{cases} f_1 &= -\frac{\partial P}{\partial \Psi} / \frac{\partial P}{\partial \Upsilon} \\ f_{\ell+1}(\Psi, \Upsilon) &= \frac{1}{\ell+1} \left[ \frac{\partial f_\ell}{\partial \Psi}(\Psi, \Upsilon) + f_1(\Psi, \Upsilon) \frac{\partial f_\ell}{\partial \Upsilon}(\Psi, \Upsilon) \right], \quad \forall \ell \geq 1 \end{cases}.$$

Ensuite, on applique ce fait aux deux fonctions  $F_1 = \widetilde{\tau}(X) = X + t$  et  $F_2 = \widetilde{\tau}(Z)$  en remarquant qu'on a :  $\frac{1}{\ell!} \frac{d^\ell \widetilde{\tau}(Z)}{d\widetilde{\tau}(X)^\ell} = \frac{\widetilde{\partial^\ell Z}}{\widetilde{\Delta}^{2\ell-1}}$ ,  $\forall \ell \geq 1$ . Posons maintenant,

$$\begin{aligned} R &:= \widetilde{\Delta} \frac{\partial \widetilde{\Delta}}{\partial \Psi} - \frac{\partial \widetilde{G}}{\partial \Psi} \frac{\partial \widetilde{\Delta}}{\partial \Upsilon} \\ &= 24g_2 \Psi^3 + 72g_3 \Psi^2 \Upsilon + 2g_2^2 \Psi \Upsilon^2 + 2g_2 \Upsilon. \end{aligned}$$

Etant donné une place infinie  $v$  de  $K$  et un entier positif  $\ell \geq 1$ , les majorations -citées au §2- de la hauteur  $H_v$  d'une somme, d'un produit de polynômes ou encore de dérivées de polynômes, permettent d'estimer le deuxième membre de la relation (3.2) en fonction de  $\ell, m_v$  et  $H_v(\widetilde{\partial^\ell Z})$ . On obtient :

$$\begin{aligned}
H_v(\widetilde{\partial^{\ell+1} Z}) &\leq \frac{1}{\ell+1} \left[ H_v \left( \frac{\partial(\widetilde{\partial^\ell Z})}{\partial \Psi} \right) H_v(\widetilde{\Delta})^2 \mathcal{N}(\widetilde{\Delta}) \right. \\
&\quad \left. + H_v \left( \frac{\partial(\widetilde{\partial^\ell Z})}{\partial \Upsilon} \right) H_v \left( \frac{\partial \widetilde{G}}{\partial \Psi} \right) H_v(\widetilde{\Delta}) \mathcal{N} \left( \frac{\partial \widetilde{G}}{\partial \Psi} \right) + (2\ell-1) H_v(\widetilde{\partial^\ell Z}) H_v(R) \mathcal{N}(R) \right] \\
&\leq \frac{1}{\ell+1} \left[ (3\ell-1) H_v(\widetilde{\partial^\ell Z}) (3M_v)^2 \cdot 3 + (3\ell-1) H_v(\widetilde{\partial^\ell Z}) \cdot 12M_v \cdot 3M_v \cdot 2 \right. \\
&\quad \left. + (2\ell-1) H_v(\widetilde{\partial^\ell Z}) \cdot 72M_v^2 \cdot 4 \right] \\
&\leq (30M_v)^2 H_v(\widetilde{\partial^\ell Z}),
\end{aligned} \tag{3.3}$$

où dans cette série d'inégalités, on a désigné par  $\mathcal{N}$  l'application associant à tout polynôme, le nombre de monôme intervenant dans son écriture canonique. De plus, on a majoré  $H_v(\partial(\widetilde{\partial^\ell Z})/\partial \Psi)$  et  $H_v(\partial(\widetilde{\partial^\ell Z})/\partial \Upsilon)$  par  $d^\circ \widetilde{\partial^\ell Z} \cdot H_v(\widetilde{\partial^\ell Z}) \leq (3\ell-1) H_v(\widetilde{\partial^\ell Z})$  (d'après l'estimation de la proposition 3.1 -déjà démontrée- pour les degrés des polynômes  $\widetilde{\partial^\ell Z}$ ),  $H_v(\widetilde{\Delta})$  par  $3M_v$ ,  $H_v(\partial \widetilde{G}/\partial \Psi)$  par  $12M_v$ ,  $H_v(R)$  par  $72M_v^2$ ,  $\mathcal{N}(\widetilde{\Delta})$  par 3,  $\mathcal{N}(\partial \widetilde{G}/\partial \Psi)$  par 2 et  $\mathcal{N}(R)$  par 4.

Par suite, comme :  $H_v(\partial^1 Z) = H_v(12\Psi^2 - g_2\Upsilon^2) \leq 30M_v$ , la récurrence sur  $\ell$ , utilisant (3.3), donne :

$$H_v(\widetilde{\partial^\ell Z}) \leq (30M_v)^{2\ell-1} \quad (\forall \ell \geq 1).$$

En prenant finalement les logarithmes des deux termes de cette dernière inégalité et en majorant  $\log 30$  par 4, on aboutit à l'estimation restante de la proposition 3.1. Ce qui achève cette démonstration. ■

**Avertissement.**— On posera pour tout  $\ell \in \mathbb{N}$ ,

$$f(\ell) := \max(0, 2\ell-1) \quad \text{et} \quad g(\ell) := 2f(\ell) - \ell = \max(0, 3\ell-2).$$

On posera aussi  $\widetilde{\partial^\ell(X)} = \begin{cases} X & \text{si } \ell = 0 \\ 1 & \text{si } \ell = 1 \\ 0 & \text{si } \ell \geq 2 \end{cases}$  et  $\widetilde{\partial^0 Z} = Z$ . La proposition 3.1 donne

alors :

$$\widetilde{\tau}(X) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \widetilde{\partial^\ell X} t^\ell \quad \text{et} \quad \widetilde{\tau}(Z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\widetilde{\partial^\ell Z}}{\widetilde{\Delta}^{f(\ell)}} t^\ell.$$

Avec toutes ces notations on peut énoncer :

**Corollaire 3.2** *Pour tout monôme  $\mathbf{m} := X^{\alpha_1} Z^{\alpha_2}$  on a :*

$$\widetilde{\tau}(\mathbf{m}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\widetilde{\partial^\ell \mathbf{m}}}{\widetilde{\Delta}^{f(\ell)}} t^\ell$$

avec  $\widetilde{\partial^\ell \mathbf{m}} \in k[X, Z]$  (pour tout  $\ell \in \mathbb{N}$ ). De plus, pour  $\delta \in \mathbb{N}$ ,  $T \in \mathbb{N}^*$  et  $v$  une place de  $K$  on a :

$$\max \left( d^\circ \widetilde{\partial^\ell \mathbf{m}} ; d^\circ \mathbf{m} \leq \delta, \ell = 0, \dots, T \right) \leq 3T + \delta - 2$$

$$h_v \left( \widetilde{\partial^\ell \mathbf{m}} ; d^\circ \mathbf{m} \leq \delta, \ell = 0, \dots, T \right) \leq \begin{cases} 2m_v T & \text{si } v \text{ est finie} \\ 2(m_v + 6)T + \delta & \text{si } v \text{ est infinie} \end{cases}.$$

Par conséquent pour tout  $\delta \in \mathbb{N}$  et  $T \in \mathbb{N}^*$  on a :

$$\tilde{h} \left( \widetilde{\partial^\ell \mathbf{m}} ; d^\circ \mathbf{m} \leq \delta, \ell = 0, \dots, T \right) \leq 2(\eta + 6)T + \delta.$$

**Démonstration.**— On a  $\mathbf{m} := X^{\alpha_1} Z^{\alpha_2}$  donc d'après la proposition 3.1 :

$$\tilde{\tau}(\mathbf{m}) = \tilde{\tau}(X)^{\alpha_1} \tilde{\tau}(Z)^{\alpha_2} = (X + t)^{\alpha_1} \left( \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\widetilde{\partial^\ell Z}}{\widetilde{\Delta f^{(\ell)}}}(X, Z) \right)^{\alpha_2}.$$

Le développement de cette dernière expression donne une série en  $t$  qui s'identifie à la série  $\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\widetilde{\partial^\ell \mathbf{m}}}{\widetilde{\Delta f^{(\ell)}}} t^\ell$  pour :

$$\widetilde{\partial^\ell \mathbf{m}} = \sum \widetilde{\partial^{\ell_{11}} X} \dots \widetilde{\partial^{\ell_{1\alpha_1}} X} \widetilde{\Delta f^{(\ell)} - (f(\ell_{21}) + \dots + f(\ell_{2\alpha_2}))} \widetilde{\partial^{\ell_{21}} Z} \dots \widetilde{\partial^{\ell_{2\alpha_2}} Z}$$

( $\forall \ell \geq 0$ ), où la somme  $\sum$  porte sur tous les uplets  $(\ell_{11}, \dots, \ell_{1\alpha_1}, \ell_{21}, \dots, \ell_{2\alpha_2})$  de  $\mathbb{N}^{\alpha_1 + \alpha_2}$  satisfaisant  $\ell_{11} + \dots + \ell_{1\alpha_1} + \ell_{21} + \dots + \ell_{2\alpha_2} = \ell$  et  $\ell_{11}, \dots, \ell_{1\alpha_1} \in \{0, 1\}$ . Ces derniers  $\widetilde{\partial^\ell \mathbf{m}}$  sont effectivement des polynômes de  $K[X, Z]$  dont on estime les degrés et hauteurs grâce à la proposition 3.1. On obtient ainsi les estimation du corollaire 3.2. ■

## 4 Plongements éclatants

Dans tout ce qui suit  $m \geq 2$  désignera un entier positif. Pour tout  $\underline{a} = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{N}^m$  avec  $a_1 \geq 1, \dots, a_{m-1} \geq 1$  et  $a_m = 1$  on considère le morphisme (plongement)  $\psi_{\underline{a}}$  de  $E^m$  dans  $E^m \times E^{m-1}$  défini par :

$$\begin{aligned} E^m & \xrightarrow{\psi_{\underline{a}}} E^m \times E^{m-1} \\ (x_1, \dots, x_m) & \longmapsto (x_1, \dots, x_m, a_1 x_1 - x_m, \dots, a_{m-1} x_{m-1} - x_m) \end{aligned}.$$

En plongeant de nouveau  $E^m \times E^{m-1}$  dans  $\mathbb{P}_2^{2m-1}$  par  $i^{2m-1}$  on obtient le *plongement éclatant* :

$$\varphi_{\underline{a}} := i^{2m-1} \circ \psi_{\underline{a}} : E^m \hookrightarrow \mathbb{P}_2^{2m-1}.$$

Nous nous intéressons dans le lemme suivant aux multidegrés de  $\varphi_{\underline{a}}(E^m)$  dans  $\mathbb{P}_2^{2m-1}$ .

**Lemme 4.1** *Soient  $I$  un sous-ensemble de  $\{1, \dots, m\}$  et  $J$  un sous-ensemble de  $\{1, \dots, m-1\}$  tels que :  $\text{card } I + \text{card } J = m$ . Notons par  $(I, J)$  le  $(2m-1)$ -uplet  $(I, J) := (\mathbb{I}_I(1), \dots, \mathbb{I}_I(m), \mathbb{I}_J(1), \dots, \mathbb{I}_J(m-1))$  où  $\mathbb{I}_I$  et  $\mathbb{I}_J$  désignent les fonctions caractéristiques de  $I$  et  $J$  respectivement. Le multidegré  $d_{(I, J)}(\varphi_{\underline{a}}(E^m))$  est nul sauf si :  $m \in I$  et  $I \cap J = \emptyset$  ou bien  $m \notin I$  et  $I \cap J$  est un singleton et dans ces deux cas il vaut :*

$$d_{(I, J)}(\varphi_{\underline{a}}(E^m)) = \prod_{i \in J \setminus I} a_i^2 \cdot d(E)^m.$$

**Démonstration.**— Dans toute cette démonstration on identifie  $E$  au tore complexe  $\mathbb{C}/\Lambda$  pour un réseau  $\Lambda = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$  ( $\tau \in \mathbb{C}, \text{Im}\tau > 0$ ) de  $\mathbb{C}$ . L'invariance du multidegré par translation permet d'écrire pour tout  $u = (u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_{m-1}) \in E^{2m-1}$  :

$$d_{(I, J)}(\varphi_{\underline{a}}(E^m)) = d_{(I, J)}(i^{2m-1} \circ \psi_{\underline{a}}(E^m)) = d_{(I, J)}(i^{2m-1} \circ \tau_u \circ \psi_{\underline{a}}(E^m))$$

où  $\tau_u$  désigne la translation par  $u$  dans  $E^{2m-1}$ . D'autre part, en posant  $i_1 = \mathbb{I}_I(1), \dots, i_m = \mathbb{I}_I(m)$  et  $j_1 = \mathbb{I}_J(1), \dots, j_{m-1} = \mathbb{I}_J(m-1)$  on a, d'après le théorème de Wirtinger multiprojectif :

$$\begin{aligned} d_{(I,J)} (i^{2m-1} \circ \tau_u \circ \psi_{\underline{a}}(E^m)) &= d_{(i_1, \dots, i_m, j_1, \dots, j_{m-1})} (i^{2m-1} \circ \tau_u \circ \psi_{\underline{a}}(E^m)) \\ &= \int_{i^{2m-1} \circ \tau_u \circ \psi_{\underline{a}}(E^m)} \Omega_{\mathbb{P}_2}^{\wedge i_1} \wedge \dots \wedge \Omega_{\mathbb{P}_2}^{\wedge i_m} \wedge \Omega_{\mathbb{P}_2}^{\wedge j_1} \wedge \dots \wedge \Omega_{\mathbb{P}_2}^{\wedge j_{m-1}} \end{aligned}$$

où  $\Omega_{\mathbb{P}_2}$  désigne la forme de Fubini-study sur  $\mathbb{P}_2$ . En faisant un changement de variable dans cette dernière intégrale et en moyennant  $(2m-1)$  fois par la mesure de Haar normalisée  $\nu_E$  sur  $E$ , puis en inversant les signes d'intégration on aura les égalités successives suivantes :

$$\begin{aligned} &\int_{i^{2m-1} \circ \tau_u \circ \psi_{\underline{a}}(E^m)} \Omega_{\mathbb{P}_2}^{\wedge i_1} \wedge \dots \wedge \Omega_{\mathbb{P}_2}^{\wedge i_m} \wedge \Omega_{\mathbb{P}_2}^{\wedge j_1} \wedge \dots \wedge \Omega_{\mathbb{P}_2}^{\wedge j_{m-1}} \\ &= \int_{\psi_{\underline{a}}(E^m)} (i^{2m-1} \circ \tau_u)^* (\Omega_{\mathbb{P}_2}^{\wedge i_1} \wedge \dots \wedge \Omega_{\mathbb{P}_2}^{\wedge i_m} \wedge \Omega_{\mathbb{P}_2}^{\wedge j_1} \wedge \dots \wedge \Omega_{\mathbb{P}_2}^{\wedge j_{m-1}}) (Z_1, \dots, Z_{2m-1}) \\ &= \int_{E^m} (i^{2m-1} \circ \tau_u)^* (\Omega_{\mathbb{P}_2}^{\wedge i_1} \wedge \dots \wedge \Omega_{\mathbb{P}_2}^{\wedge i_m} \wedge \Omega_{\mathbb{P}_2}^{\wedge j_1} \wedge \dots \wedge \Omega_{\mathbb{P}_2}^{\wedge j_{m-1}}) (Z_1, \dots, Z_m, \\ &\quad a_1 Z_1 - Z_m, \dots, a_{m-1} Z_{m-1} - Z_m) \\ &= \int_{E^{2m-1}} \left[ \int_{E^m} (i^{2m-1} \circ \tau_u)^* (\Omega_{\mathbb{P}_2}^{\wedge i_1} \wedge \dots \wedge \Omega_{\mathbb{P}_2}^{\wedge i_m} \wedge \Omega_{\mathbb{P}_2}^{\wedge j_1} \wedge \dots \wedge \Omega_{\mathbb{P}_2}^{\wedge j_{m-1}}) (Z_1, \dots, \right. \\ &\quad \left. Z_m, a_1 Z_1 - Z_m, \dots, a_{m-1} Z_{m-1} - Z_m) \right] \wedge d\nu_E(u_1) \wedge \dots \wedge d\nu_E(u_m) \\ &\quad \wedge d\nu_E(v_1) \wedge \dots \wedge d\nu_E(v_{m-1}) \\ &= \int_{E^m} \left[ \int_{E^{2m-1}} (i^{2m-1} \circ \tau_u)^* (\Omega_{\mathbb{P}_2}^{\wedge i_1} \wedge \dots \wedge \Omega_{\mathbb{P}_2}^{\wedge i_m} \wedge \Omega_{\mathbb{P}_2}^{\wedge j_1} \wedge \dots \wedge \Omega_{\mathbb{P}_2}^{\wedge j_{m-1}}) (Z_1, \dots, \right. \\ &\quad \left. Z_m, a_1 Z_1 - Z_m, \dots, a_{m-1} Z_{m-1} - Z_m) \wedge d\nu_E(u_1) \wedge \dots \wedge d\nu_E(u_m) \right. \\ &\quad \left. \wedge d\nu_E(v_1) \wedge \dots \wedge d\nu_E(v_{m-1}) \right] \\ &= \int_{E^m} \left[ \int_E (i \circ \tau_{u_1})^* (\Omega_{\mathbb{P}_2}^{\wedge i_1}) (Z_1) \wedge d\nu_E(u_1) \wedge \dots \wedge \int_E (i \circ \tau_{u_m})^* (\Omega_{\mathbb{P}_2}^{\wedge i_m}) (Z_m) \right. \\ &\quad \wedge d\nu_E(u_m) \wedge \int_E (i \circ \tau_{v_1})^* (\Omega_{\mathbb{P}_2}^{\wedge j_1}) (a_1 Z_1 - Z_m) \wedge d\nu_E(v_1) \wedge \dots \\ &\quad \left. \wedge \int_E (i \circ \tau_{v_{m-1}})^* (\Omega_{\mathbb{P}_2}^{\wedge j_{m-1}}) (a_{m-1} Z_{m-1} - Z_m) \wedge d\nu_E(v_{m-1}) \right]. \end{aligned}$$

Or, d'après la proposition 3.1 de [Da-Ph] (adaptée au plongement de Weierstrass), cette dernière intégrale vaut :

$$\begin{aligned} &\int_{D_E^m} \left( \frac{H(dZ_1, dZ_1)}{-2i} \right)^{\wedge i_1} \wedge \dots \wedge \left( \frac{H(dZ_m, dZ_m)}{-2i} \right)^{\wedge i_m} \left( \frac{H(a_1 dZ_1 - dZ_m, a_1 dZ_1 - dZ_m)}{-2i} \right)^{\wedge j_1} \\ &\quad \wedge \dots \wedge \left( \frac{H(a_{m-1} dZ_{m-1} - dZ_m, a_{m-1} dZ_{m-1} - dZ_m)}{-2i} \right)^{\wedge j_{m-1}}, \end{aligned}$$

où  $D_E$  est un domaine fondamental du réseau  $\Lambda \subset \mathbb{C}$  et  $H$  désigne la forme de Riemann associée à ce réseau. En remarquant finalement que pour tout  $t \in$

$\{1, \dots, m-1\} : H(a_t dZ_t - dZ_m, a_t dZ_t - dZ_m) = a_t^2 H(dZ_t, dZ_t) - 2a_t H(dZ_t, dZ_m) + H(dZ_m, dZ_m)$  et que  $\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \{1, \dots, m\} : H(dZ_\alpha, dZ_\beta) \wedge H(dZ_\gamma, dZ_\delta) = (\text{IM}\tau)^{-2} dZ_\alpha \wedge d\overline{Z}_\beta \wedge dZ_\gamma \wedge d\overline{Z}_\delta$  est nul dès que  $\alpha = \gamma$  ou  $\beta = \delta$ , l'inégalité précédente devient :

- si  $m \in I$  et  $I \cap J = \emptyset$  ou bien  $m \notin I$  et  $I \cap J = \{k\}$  pour un certain  $k \in \{1, \dots, m-1\}$  :

$$\prod_{i \in J \setminus I} a_i^2 \cdot \int_{D_{E^m}} \left( \frac{H(dZ_1, dZ_1)}{-2i} \right) \wedge \dots \wedge \left( \frac{H(dZ_m, dZ_m)}{-2i} \right) = \prod_{i \in J \setminus I} a_i^2 \cdot d(E)^m$$

(en utilisant une autre fois le théorème de Wirtinger)

- nulle sinon. ■

## 5 Paramétrisation locale de l'image de $E^m$ dans $\mathbb{P}_2^{2m-1}$

Commençons d'abord par l'homogénéisation du monomorphisme  $\tilde{\tau}$  de la proposition 3.1 qui consiste à définir un monomorphisme  $\tau$  de  $A(E) := \frac{K[X, Y, Z]}{I(E)}$  dans  $K(E)_0[[t]]$  à partir duquel on retrouve notre monomorphisme  $\tilde{\tau}$  en spécialisant la variable  $Y$  à 1. On doit alors définir  $\tau$  de la manière suivante :  $\forall P_1 \in A(E)$  :

$$\tau(P_1) := \tilde{\tau}(\tilde{P}_1) \left( \frac{X}{Y}, \frac{Z}{Y} \right)$$

avec  $\tilde{P}_1$  désigne l'élément de  $A(\tilde{E})$  :

$$\tilde{P}_1(X, Z) := P_1(X, 1, Z).$$

Posons aussi par définition :

$$\Delta(X, Y, Z) := Y^2 \tilde{\Delta} \left( \frac{X}{Y}, \frac{Z}{Y} \right) = 3g_3 Z^2 + 2g_2 XZ + Y^2$$

et pour un monôme  $\mathbf{m} := X^{\alpha_1} Y^{\alpha_2} Z^{\alpha_3}$  de  $A(E)$  et un entier  $\ell \in \mathbb{N}$  :

$$\partial^\ell \mathbf{m} := Y^{g(\ell) + d^\circ \mathbf{m}} \widetilde{\partial^\ell \mathbf{m}} \left( \frac{X}{Y}, \frac{Z}{Y} \right)$$

avec  $\widetilde{\mathbf{m}}$  désigne le monôme de  $A(\tilde{E})$  :

$$\widetilde{\mathbf{m}}(X, Z) := \mathbf{m}(X, 1, Z) = X^{\alpha_1} Z^{\alpha_3}.$$

Ces derniers  $\partial^\ell \mathbf{m}, \ell \in \mathbb{N}$  sont -d'après le corollaire 3.2- des formes de  $K[X, Y, Z]$  de degrés :  $d^\circ \partial^\ell \mathbf{m} = g(\ell) + d^\circ \mathbf{m}$  ( $\forall \ell \in \mathbb{N}$ ) et chaque forme  $\partial^\ell \mathbf{m}$  ( $\ell \in \mathbb{N}$ ) a évidemment les mêmes coefficients que le polynôme  $\widetilde{\partial^\ell \mathbf{m}}$  de  $K[X, Z]$ , donc à fortiori une famille finie de formes  $(\partial^\ell \mathbf{m})_{\ell, \mathbf{m}}$  a la même hauteur logarithmique que la famille finie correspondante des polynômes  $(\widetilde{\partial^\ell \mathbf{m}})_{\ell, \mathbf{m}}$ . Ainsi du corollaire 3.2 découle immédiatement le corollaire suivant :

**Corollaire 5.1** *Il existe un monomorphisme d'anneau  $\tau$  de  $A(E) := \frac{K[X, Y, Z]}{I(E)}$  dans  $K(E)_0[[t]]$  associant à tout monôme  $\mathbf{m} := X^{\alpha_1} Y^{\alpha_2} Z^{\alpha_3}$  de  $A(E)$  :*

$$\tau(\mathbf{m}) = \frac{1}{Y^{d^\circ \mathbf{m}}} \left( \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{Y^\ell \cdot \partial^\ell \mathbf{m}}{\Delta^{f(\ell)}} t^\ell \right)$$

où les  $\partial^\ell \mathbf{m}$ ,  $\ell \in \mathbb{N}$  sont des formes de  $K[X, Y, Z]$  et pour  $\delta \in \mathbb{N}$  et  $T \in \mathbb{N}^*$  on a :

$$\max \left( d^\circ \partial^\ell \mathbf{m} ; d^\circ \mathbf{m} \leq \delta, \ell = 0, \dots, T \right) \leq 3T + \delta - 2$$

$$h_v \left( \partial^\ell \mathbf{m} ; d^\circ \mathbf{m} \leq \delta, \ell = 0, \dots, T \right) \leq \begin{cases} 2m_v T & \text{si } v \text{ est finie} \\ 2(m_v + 6)T + \delta & \text{si } v \text{ est infinie} \end{cases}.$$

Par conséquent, pour tout  $\delta \in \mathbb{N}$  et  $T \in \mathbb{N}^*$  on a :

$$\tilde{h} \left( \partial^\ell \mathbf{m} ; d^\circ \mathbf{m} \leq \delta, \ell = 0, \dots, T \right) \leq 2(\eta + 6)T + \delta.$$

Maintenant, étant donné un  $m$ -uplet fixé  $\underline{a} = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{N}^m$  tel que  $a_i \geq 5$  pour  $i = 1, \dots, m-1$  et  $a_m = 1$ , posons :

$$B := \frac{K[\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_m, \underline{Y}_1, \dots, \underline{Y}_{m-1}]}{I(\varphi_{\underline{a}}(E^m))}$$

l'anneau des coordonnées de  $\varphi_{\underline{a}}(E^m)$  et  $K(\varphi_{\underline{a}}(E^m))$  son corps de fractions, avec  $\underline{X}_i := (X_{i0}, X_{i1}, X_{i2})$  et  $\underline{Y}_i := (Y_{i0}, Y_{i1}, Y_{i2})$ ,  $i = 1, \dots, m-1$ . Soit, par ailleurs,  $\underline{D}$  une famille de formes bihomogènes représentant la différence dans  $E$  au voisinage de  $\{\mathbf{0}\} \times \{\mathbf{0}\}$ . D'après le théorème 13.1 du formulaire,  $\underline{D}$  peut être prise constituée de formes de bidegré  $(2, 2)$  et de hauteur logarithmique locale  $h_v$  (resp de longueur logarithmique locale  $\ell_v$ ) -pour une place finie (resp infinie)  $v$  sur  $K$ - majorée par :  $h_v(\underline{D}) \leq 3m_v$  (resp  $\ell_v(\underline{D}) \leq 3m_v + 7$ ) et de hauteur de Gauss-Weil majorée par :  $\tilde{h}(\underline{D}) \leq 3\eta + 5$ . Soit aussi, pour tout entier  $k \geq 1$ ,  $\underline{F}^{(k)}$  une famille de formes homogènes représentant la multiplication par  $k$  dans  $E$ . D'après le théorème 13.3 du formulaire,  $\underline{F}^{(k)}$  peut être prise constituée de formes de degré  $k^2$  chacune, de hauteur logarithmique locale  $v$ -adique (resp de longueur logarithmique locale  $v$ -adique) -pour une place finie (resp infinie)  $v$  sur  $K$ - majorée par  $\frac{3}{2}m_v k^2$  (resp  $\frac{3}{2}(m_v + 3)k^2$ ) et de hauteur de Gauss-Weil majorée par :  $\tilde{h}(\underline{F}^{(k)}) \leq \frac{3}{2}(\eta + 3)k^2$ . À partir du monomorphisme  $\tau$ , on en déduit un monomorphisme de paramétrisation locale pour la sous-variété  $\varphi_{\underline{a}}(E^m)$  de  $\mathbb{P}_2^{2m-1}$  qu'on notera  $\Omega_{\underline{a}}$  et qu'on définit par :

$$\begin{aligned} \Omega_{\underline{a}} : B &\rightarrow K(\varphi_{\underline{a}}(E^m))[[\underline{u}]] \\ \Omega_{\underline{a}}(\underline{X}_1) &:= \tau_1(\underline{X}_1), \dots, \Omega_{\underline{a}}(\underline{X}_m) := \tau_m(\underline{X}_m); \\ \Omega_{\underline{a}}(\underline{Y}_1) &:= \underline{D} \left( \underline{F}^{(a_1)}(\tau_1(\underline{X}_1)), \tau_m(\underline{X}_m) \right) \\ &\vdots \\ \Omega_{\underline{a}}(\underline{Y}_{m-1}) &:= \underline{D} \left( \underline{F}^{(a_{m-1})}(\tau_{m-1}(\underline{X}_{m-1})), \tau_m(\underline{X}_m) \right) \end{aligned}$$

où  $\tau_i : A(E) \rightarrow K(E)_0[u_i]$  ( $i = 1, \dots, m$ ) désigne le monomorphisme  $\tau$  du corollaire 5.1 pour la  $i$  ème composante  $E$  de la sous-variété  $E^m$  de  $\mathbb{P}_2^m$  et  $\underline{u} := (u_1, \dots, u_m)$ . On a le lemme suivant :

**Lemme 5.2** *Avec toutes les notations précédentes, pour tout monôme*

$$\mathbf{m} = \underline{X}_1^{\alpha_1} \dots \underline{X}_m^{\alpha_m} \underline{Y}_1^{\beta_1} \dots \underline{Y}_{m-1}^{\beta_{m-1}} \text{ on a :}$$

$$\Omega_{\underline{a}}(\mathbf{m}) = \frac{1}{X_{11}^{d_1} \dots X_{m1}^{d_m}} \sum_{i_1 \geq 0, \dots, i_m \geq 0} \frac{X_{11}^{i_1} \dots X_{m1}^{i_m} \partial^{(i_1, \dots, i_m)} \mathbf{m}}{\Delta(\underline{X}_1)^{f(i_1)} \dots \Delta(\underline{X}_m)^{f(i_m)}} u_1^{i_1} \dots u_m^{i_m}$$

où  $d_1, \dots, d_m$  désignent les entiers positifs :

$$\begin{aligned} d_i &:= |\underline{\alpha}_i| + 2a_i^2 |\underline{\beta}_i| \quad \text{pour } i = 1, \dots, m-1 \\ \text{et } d_m &:= |\underline{\alpha}_m| + 2 \left( |\underline{\beta}_1| + \dots + |\underline{\beta}_{m-1}| \right); \end{aligned}$$



les  $\partial^{(i_1, \dots, i_m)} \mathbf{m}$  sont des formes de  $K[\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_m]$  de degrés majorés par :

$$d_{\underline{X}_1}^{\circ} \partial^{(i_1, \dots, i_m)} \mathbf{m} \leq d_1 + g(i_1)$$

$$\vdots$$

$$d_{\underline{X}_m}^{\circ} \partial^{(i_1, \dots, i_m)} \mathbf{m} \leq d_m + g(i_m)$$

et pour tout  $\delta_1, \dots, \delta_m, \delta'_1, \dots, \delta'_{m-1}, T \in \mathbb{N}$ , la famille des formes  $\partial^{(i_1, \dots, i_m)} \mathbf{m}$ ,  $d_{\underline{X}_1}^{\circ} \mathbf{m} \leq \delta_1, \dots, d_{\underline{X}_m}^{\circ} \mathbf{m} \leq \delta_m, d_{\underline{X}_1}^{\circ} \mathbf{m} \leq \delta'_1, \dots, d_{\underline{X}_{m-1}}^{\circ} \mathbf{m} \leq \delta'_{m-1}, i_1 + \dots + i_m \leq T$  est de hauteur logarithmique locale  $h_v$  majorée par :

$$\left[ 2T + \sum_{i=1}^{m-1} 3(a_i^2 + 1) \delta'_i \right] m_v$$

lorsque  $v$  est finie et elle est de longueur logarithmique locale  $\ell_v$  majorée par :

$$\left[ 2T + \sum_{i=1}^{m-1} 3(a_i^2 + 1) \delta'_i \right] m_v + 12T + (\delta_1 + \dots + \delta_m) + \sum_{i=1}^{m-1} (11a_i^2 + 9) \delta'_i$$

lorsque  $v$  est infinie. Par conséquent, elle est de hauteur de Gauss-Weil majorée par :

$$\left[ 2T + \sum_{i=1}^{m-1} 3(a_i^2 + 1) \delta'_i \right] \eta + 12T + (\delta_1 + \dots + \delta_m) + \sum_{i=1}^{m-1} (11a_i^2 + 9) \delta'_i.$$

**Démonstration.**— Pour tout monôme  $\mathbf{m} = \underline{X}_1^{\alpha_1} \dots \underline{X}_m^{\alpha_m} \underline{Y}_1^{\beta_1} \dots \underline{Y}_{m-1}^{\beta_{m-1}}$ , on remarque que la série  $\Omega_{\underline{a}}(\mathbf{m})$  s'obtient en substituant respectivement dans la forme :

$$R(\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_m) := \underline{X}_1^{\alpha_1} \dots \underline{X}_m^{\alpha_m} \prod_{i=1}^{m-1} \underline{D} \left( F^{(a_i)}(\underline{X}_i), \underline{X}_m \right)^{\beta_i}$$

$\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_m$  par  $\tau_1(\underline{X}_1), \dots, \tau_m(\underline{X}_m)$ .

Il est clair que cette forme multihomogène  $R$  de  $K[\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_m]$  est de multidegré :

$$\left( |\alpha_1| + 2a_1^2 |\beta_1|, \dots, |\alpha_{m-1}| + 2a_{m-1}^2 |\beta_{m-1}|, |\alpha_m| + 2 \sum_{i=1}^{m-1} |\beta_i| \right)$$

et un simple calcul montre que pour toute place  $v$  sur  $K$  on a :

$$h_v(R) \leq \left[ \sum_{i=1}^{m-1} 3(a_i^2 + 1) |\beta_i| \right] m_v$$

lorsque  $v$  est finie et :

$$\ell_v(R) \leq \left[ \sum_{i=1}^{m-1} 3(a_i^2 + 1) |\beta_i| \right] m_v + \sum_{i=1}^{m-1} (9a_i^2 + 7) |\beta_i|$$

lorsque  $v$  est infinie.

De plus le nombre de monômes que contient  $R$  est majoré par :

$$\binom{2|\beta_1| + a_1^2 + 2}{2} \dots \binom{2|\beta_{m-1}| + a_{m-1}^2 + 2}{2} \binom{2|\beta_1| + \dots + 2|\beta_{m-1}| + 2}{2}.$$

Il ne reste qu'à appliquer le lemme 5.1 à chaque monôme intervenant dans  $R$  pour conclure. En effet, en écrivant :

$$R(\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_m) =: \sum_{\underline{\gamma}=(\gamma_1, \dots, \gamma_m) \in U} r(\underline{\gamma}) \underline{X}_1^{\gamma_1} \dots \underline{X}_m^{\gamma_m}$$

pour un certain sous-ensemble fini  $U$  de  $(\mathbb{N}^3)^m$  et certains nombres  $r(\underline{\gamma}), \underline{\gamma} \in U$  de  $K$ , on a :

$$\begin{aligned} \Omega_{\underline{a}}(\mathbf{m}) &= R(\tau(\underline{X}_1), \dots, \tau(\underline{X}_m)) \\ &= \sum_{\underline{\gamma} \in U} r(\underline{\gamma}) \tau(\mathbf{m}_1) \dots \tau(\mathbf{m}_m) \end{aligned}$$

avec  $\mathbf{m}_i := \underline{X}_i^{\gamma_i}$  pour  $i = 1, \dots, m$ . En substituant maintenant les  $\tau(\mathbf{m}_i)$  ( $i = 1, \dots, m$ ) par leurs expressions données par le corollaire 5.1, on aura :

$$\begin{aligned} \Omega_{\underline{a}}(\mathbf{m}) &= \sum_{\underline{\gamma} \in U} \left[ r(\underline{\gamma}) \frac{1}{X_{11}^{|\underline{\gamma}_1|}} \left( \sum_{i_1=0}^{\infty} \frac{X_{11}^{i_1} \partial^{i_1} \mathbf{m}_1}{\Delta(\underline{X}_1)^{f(i_1)}} u_1^{i_1} \right) \dots \frac{1}{X_{m1}^{|\underline{\gamma}_m|}} \left( \sum_{i_m=0}^{\infty} \frac{X_{m1}^{i_m} \partial^{i_m} \mathbf{m}_m}{\Delta(\underline{X}_m)^{f(i_m)}} u_m^{i_m} \right) \right] \\ &= \frac{1}{X_{11}^{d_1} \dots X_{m1}^{d_m}} \sum_{i_1 \geq 0, \dots, i_m \geq 0} \frac{X_{11}^{i_1} \dots X_{m1}^{i_m} \partial^{(i_1, \dots, i_m)} \mathbf{m}}{\Delta(\underline{X}_1)^{f(i_1)} \dots \Delta(\underline{X}_m)^{f(i_m)}} u_1^{i_1} \dots u_m^{i_m} \end{aligned}$$

$$\text{avec } d_i := |\underline{\gamma}_i| = \begin{cases} |\underline{\alpha}_i| + 2a_i^2 |\underline{\beta}_i| & \text{pour } i = 1, \dots, m-1 \\ |\underline{\alpha}_m| + 2(|\underline{\beta}_1| + \dots + |\underline{\beta}_{m-1}|) & \text{pour } i = m \end{cases}$$

$$\text{et } \partial^{(i_1, \dots, i_m)} \mathbf{m} := \sum_{\underline{\gamma} \in U} r(\underline{\gamma}) \partial^{i_1} \mathbf{m}_1 \dots \partial^{i_m} \mathbf{m}_m, \quad \forall (i_1, \dots, i_m) \in \mathbb{N}^m.$$

Ainsi, on a bien la formule du lemme 5.2 pour  $\Omega_{\underline{a}}(\mathbf{m})$  et de plus, concernant les degrés on a :

$$d_{\underline{X}_j}^{\partial^{(i_1, \dots, i_m)}} \mathbf{m} = \max_{\underline{\gamma} \in U} d_{\underline{X}_j}^{\partial^{i_j}} \mathbf{m}_j \quad \forall j = 1, \dots, m$$

et concernant les hauteurs et les longueurs logarithmiques locales on a bien pour tout  $(i_1, \dots, i_m) \in \mathbb{N}^m$  :

$$h_v(\partial^{(i_1, \dots, i_m)} \mathbf{m}) \leq h_v(\partial^{i_1} \mathbf{m}_1) + \dots + h_v(\partial^{i_m} \mathbf{m}_m) + h_v(R)$$

lorsque  $v$  est une place finie sur  $K$  et :

$$\ell_v(\partial^{(i_1, \dots, i_m)} \mathbf{m}) \leq \ell_v(\partial^{i_1} \mathbf{m}_1) + \dots + \ell_v(\partial^{i_m} \mathbf{m}_m) + \ell_v(R)$$

lorsque  $v$  est une place infinie sur  $K$ . Le reste suit de l'application des estimations du lemme 5.1. La démonstration est achevée. ■

Plus généralement on a le corollaire suivant qui est une conséquence immédiate du lemme 5.2 précédent :

**Corollaire 5.3** *Pour toute forme multihomogène non identiquement nulle  $P_1 \in K[\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_m, \underline{Y}_1, \dots, \underline{Y}_{m-1}]$  de multidegré  $(\delta_1, \dots, \delta_m, \delta'_1, \dots, \delta'_{m-1})$  on a :*

$$\Omega_{\underline{a}}(P_1) = \frac{1}{X_{11}^{d_1} \dots X_{m1}^{d_m}} \sum_{i_1 \geq 0, \dots, i_m \geq 0} \frac{X_{11}^{i_1} \dots X_{m1}^{i_m} \partial^{(i_1, \dots, i_m)} P_1}{\Delta(\underline{X}_1)^{f(i_1)} \dots \Delta(\underline{X}_m)^{f(i_m)}} u_1^{i_1} \dots u_m^{i_m}$$

avec  $d_1, \dots, d_m$  désignent les entiers positifs :

$$\begin{aligned} d_1 &:= \delta_1 + 2a_1^2 \delta'_1, \\ &\vdots \\ d_{m-1} &:= \delta_{m-1} + 2a_{m-1}^2 \delta'_{m-1} \\ \text{et } d_m &:= \delta_m + 2(\delta'_1 + \dots + \delta'_{m-1}); \end{aligned}$$

les  $\partial^{(i_1, \dots, i_m)} P_1$  sont des formes de  $K[\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_m]$  de degrés majorés par :

$$\begin{aligned} d_{\underline{X}_1}^\circ \partial^{(i_1, \dots, i_m)} P_1 &\leq \delta_1 + 2a_1^2 \delta'_1 + g(i_1) \\ &\vdots \\ d_{\underline{X}_{m-1}}^\circ \partial^{(i_1, \dots, i_m)} P_1 &\leq \delta_{m-1} + 2a_{m-1}^2 \delta'_{m-1} + g(i_{m-1}) \\ d_{\underline{X}_m}^\circ \partial^{(i_1, \dots, i_m)} P_1 &\leq \delta_m + 2(\delta'_1 + \dots + \delta'_{m-1}) + g(i_m) \end{aligned}$$

et, pour tout  $T \in \mathbb{N}$  et  $v$  une place de  $K$ , la famille des formes  $\partial^{(i_1, \dots, i_m)} P_1, i_1 + \dots + i_m \leq T$  est de hauteur logarithmique locale  $h_v$  majorée par :

$$\left[ 2T + \sum_{i=1}^{m-1} 3(a_i^2 + 1) \delta'_i \right] m_v + h_v(P_1)$$

lorsque  $v$  est finie et elle est de longueur logarithmique locale  $\ell_v$  majorée par :

$$\left[ 2T + \sum_{i=1}^{m-1} 3(a_i^2 + 1) \delta'_i \right] m_v + 12T + (\delta_1 + \dots + \delta_m) + \sum_{i=1}^{m-1} (11a_i^2 + 9) + \ell_v(P_1)$$

lorsque  $v$  est infinie. Par conséquent, elle est de hauteur de Gauss-Weil majorée par :

$$\begin{aligned} &\left[ 2T + \sum_{i=1}^{m-1} 3(a_i^2 + 1) \delta'_i \right] \eta + 12T + (\delta_1 + \dots + \delta_m) + \sum_{i=1}^{m-1} (11a_i^2 + 9) + \tilde{h}(P_1) \\ &+ 2 \sum_{i=1}^m \log(\delta_i + 1) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \log(\delta'_i + 1). \end{aligned}$$

**Démonstration.** — Ecrivons

$$P_1 =: \sum_{\mathbf{m} \in \Lambda} \rho_{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{m}$$

où  $\Lambda$  est l'ensemble fini des monômes unitaires de  $K[\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_m, \underline{Y}_1, \dots, \underline{Y}_{m-1}]$  de multidegrés  $(\delta_1, \dots, \delta_m, \delta'_1, \dots, \delta'_{m-1})$  et les  $\rho_{\mathbf{m}}$  ( $\mathbf{m} \in \Lambda$ ) sont des nombres de  $K$  (ce sont les coefficients de  $P_1$ ). On a d'après le lemme 5.2 précédent :

$$\begin{aligned} \Omega_{\underline{a}}(P_1) &= \sum_{\mathbf{m} \in \Lambda} \rho_{\mathbf{m}} \cdot \Omega_{\underline{a}}(\mathbf{m}) \\ &= \frac{1}{X_{11}^{d_1} \dots X_{m1}^{d_m}} \sum_{i_1 \geq 0, \dots, i_m \geq 0} \frac{X_{11}^{i_1} \dots X_{m1}^{i_m} \partial^{(i_1, \dots, i_m)} P_1}{\Delta(\underline{X}_1)^{f(i_1)} \dots \Delta(\underline{X}_m)^{f(i_m)}} u_1^{i_1} \dots u_m^{i_m} \end{aligned}$$

$$\text{avec} \quad \partial^{(i_1, \dots, i_m)} P_1 := \sum_{\mathbf{m} \in \Lambda} \rho_{\mathbf{m}} \cdot \partial^{(i_1, \dots, i_m)} \mathbf{m}.$$

La suite du corollaire 5.3 s'obtient des estimations du lemme 5.2 pour les degrés, hauteurs et longueurs des  $\partial^{(i_1, \dots, i_m)} \mathbf{m}$ , en majorant de plus -afin d'estimer la hauteur

de Gauss-Weil des  $\partial^{(i_1, \dots, i_m)} P_1$ - les  $\ell_v(P_1)$  ( $v \in M_K^\infty$ ) par :

$$\begin{aligned} \ell_v(P_1) &\leq h_v(P_1) + \log \text{card } \Lambda \\ &\leq h_v(P_1) + \sum_{i=1}^m \log \binom{\delta_i + 2}{2} + \sum_{i=1}^{m-1} \log \binom{\delta'_i + 2}{2} \\ &\leq h_v(P_1) + 2 \sum_{i=1}^m \log(\delta_i + 1) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \log(\delta'_i + 1). \end{aligned}$$

La démonstration est achevée.  $\blacksquare$

## 6 La fonction auxiliaire

Soient, pour toute la suite de ce texte,  $\varepsilon_0$  et  $\varepsilon_1$  deux réels strictement positifs assez petits et  $\delta \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\varepsilon_0 \delta$  soit un entier positif assez grand. Le paramètre  $\delta$  est destiné à tendre vers l'infini. Nous supposons que  $\varepsilon_0$  et  $\varepsilon_1$  vérifient :

$$\varepsilon_0 \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{m-1}{m!} \left( \frac{7}{3} \right)^m \frac{\varepsilon_1^m}{\varepsilon_0(m + \varepsilon_0)(1 + \varepsilon_0)^{m-2}} \leq \frac{1}{2}.$$

Soit aussi  $\underline{a} = (a_1, \dots, a_m)$  un  $m$ -uplet de  $\mathbb{N}^m$  tel que :

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{m-1} \geq a_m = 1 \quad \text{et} \quad a_1^2 + \dots + a_{m-1}^2 + m - 1 \leq \left( 1 + \frac{1}{24} \right) a_1^2.$$

Ceci entraîne qu'on a :

$$a_1^2 \geq \frac{48}{25}(m-1) \geq m-1.$$

Posons  $T_\delta$  le simplexe de  $\mathbb{N}^m$  :

$$T_\delta := \left\{ (\tau_1, \dots, \tau_m) \in \mathbb{N}^m \mid \frac{\tau_1}{a_1^2} + \dots + \frac{\tau_{m-1}}{a_{m-1}^2} + \frac{\tau_m}{m-1} \leq 7\varepsilon_1 \delta \right\}$$

et  $\mathfrak{q}_\delta$  l'idéal de  $K[[u_1, \dots, u_m]]$  :

$$\mathfrak{q}_\delta := \{ f \in K[[u_1, \dots, u_m]] \mid f_{i_1, \dots, i_m} = 0 \quad \forall (i_1, \dots, i_m) \in T_\delta \}$$

où  $f_{i_1, \dots, i_m}$  désigne le coefficient de  $u_1^{i_1} \dots u_m^{i_m}$  dans la série  $f$  de  $K[[u_1, \dots, u_m]]$ . Dans un premier temps, nous allons construire une forme multihomogène non identiquement nulle  $P$  de  $K[\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_m, \underline{Y}_1, \dots, \underline{Y}_{m-1}]/I(\varphi_{\underline{a}}(E^m))$  de multidegré  $(\varepsilon_0 \delta a_1^2, \dots, \varepsilon_0 \delta a_m^2, \delta, \dots, \delta)$  qui soit de hauteur relativement petite par rapport à son degré et qui satisfasse la condition d'annulation :

$$\Omega_{\underline{a}}(P)(\underline{0}, \dots, \underline{0}) \in \mathfrak{q}_\delta$$

avec  $\underline{0} := (0, 1, 0)$ . Cette condition d'appartenance à  $\mathfrak{q}_\delta$  s'interprète comme système linéaire sur  $K$  en les coefficients de  $P$ . En effet, en choisissant une base  $\mathcal{M}$  du  $K$ -espace vectoriel :

$$(K[\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_m, \underline{Y}_1, \dots, \underline{Y}_{m-1}]/I(\varphi_{\underline{a}}(E^m)))_{(\varepsilon_0 \delta a_1^2, \dots, \varepsilon_0 \delta a_m^2, \delta, \dots, \delta)}$$

et en écrivant  $P = \sum_{\mathbf{m} \in \mathcal{M}} P_{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{m}$ , la condition  $\Omega_{\underline{a}}(P)(\underline{0}, \dots, \underline{0}) \in \mathfrak{q}_\delta$  se traduit par le système d'équations :

$$\sum_{\mathbf{m} \in \mathcal{M}} P_{\mathbf{m}} \cdot \partial^{(i_1, \dots, i_m)} \mathbf{m}(\underline{0}, \dots, \underline{0}) = 0 \quad \text{pour } (i_1, \dots, i_m) \in T_\delta. \quad (6.1)$$

En choisissant maintenant un ordre pour chacun des deux ensembles finis  $T_\delta$  et  $\mathcal{M}$  et en posant  $M$  la matrice :  $M := (\partial^{(i_1, \dots, i_m)} \mathbf{m}(\underline{0}, \dots, \underline{0}))_{(i_1, \dots, i_m) \in T_\delta, \mathbf{m} \in \mathcal{M}}$  et  $\vec{V}$  le vecteur :  $\vec{V} := (P_{\mathbf{m}})_{\mathbf{m} \in \mathcal{M}}$ , le système (6.1) devient :  $M \cdot \vec{V} = \vec{0}$ . On est donc ramené à chercher un vecteur non nul  $\vec{V}$  à coordonnées dans  $K$ , de hauteur assez petite et satisfaisant  $M \cdot \vec{V} = \vec{0}$ . On utilise pour cela la version suivante du lemme de Siegel, due à E. Bombieri (voir [Bom1]).

**Lemme 6.1 (lemme de Siegel)** *Pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$  avec  $m < n$  il existe  $\underline{x} \in K^n \setminus \{\underline{0}\}$  satisfaisant  $A\underline{x} = \underline{0}$  et tel que*

$$\tilde{h}(\underline{x}) \leq e \left( \tilde{h}(A) + \log n \right) + (1+e)c_S(K)$$

où  $e := \frac{m}{n-m}$  est l'exposant de Dirichlet de  $A$ ,  $c_S(K)$  est une constante dépendant seulement du corps de nombres  $K$  et  $\tilde{h}(A)$  désigne ici la hauteur de Gauss-Weil du vecteur formé de tous les coefficients de  $A$ .

L'application du lemme de Siegel ci-dessus nous donne la proposition suivante :

**Proposition 6.2** *Sous toutes les hypothèses précédentes, il existe une forme  $P \in K[\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_m, \underline{Y}_1, \dots, \underline{Y}_{m-1}]/I(\varphi_{\underline{a}}(E^m))$  non nulle, de multidegré  $(\varepsilon_0 \delta a_1^2, \dots, \varepsilon_0 \delta a_m^2, \delta, \dots, \delta)$ , satisfaisant aux équations (6.1) et de hauteur majorée par :*

$$\tilde{h}(P) \leq [14(\eta + 6)\varepsilon_1 + 4\eta + 12]\delta a_1^2 + o(\delta).$$

**Démonstration.**— L'application du lemme de Siegel ci-dessus à notre matrice  $M$  qui est à éléments dans  $K$  de format  $\text{card } T_\delta \times \text{card } \mathcal{M}$  (on vérifiera ci-dessous que  $\text{card } T_\delta < \text{card } \mathcal{M}$  pour  $\delta$  assez grand) donne l'existence d'une forme non identiquement nulle  $P$  de  $K[\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_m, \underline{Y}_1, \dots, \underline{Y}_{m-1}]/I(\varphi_{\underline{a}}(E^m))$  de multidegré  $(\varepsilon_0 \delta a_1^2, \dots, \varepsilon_0 \delta a_m^2, \delta, \dots, \delta)$  satisfaisant le système d'équations (6.1) et de hauteur  $\tilde{h}(P) \leq e(\tilde{h}(M) + \log \text{card } \mathcal{M}) + (1+e)c_S(K)$  avec  $e$  est l'exposant de Dirichlet du système (6.1) :  $e := \frac{\text{card } T_\delta}{\text{card } \mathcal{M} - \text{card } T_\delta}$  et  $c_S(K)$  est une constante ne dépendant que du corps de nombres  $K$ . L'estimation de la proposition 6.2 pour  $\tilde{h}(P)$  suit ainsi des estimations suivantes pour  $\tilde{h}(M)$ ,  $e$  et  $\log \text{card } \mathcal{M}$  :

$$\tilde{h}(M) \leq [14(\eta + 6)\varepsilon_1 + 4\eta + 12]\delta a_1^2 \quad (6.2)$$

$$e \leq 1 + o(1) \quad (6.3)$$

$$\log \text{card } \mathcal{M} = o(\delta) \quad (6.4)$$

que nous démontrons ci-après. Commençons d'abord par démontrer l'estimation (6.2) pour  $\tilde{h}(M)$  : la hauteur  $\tilde{h}(M)$  est par définition la hauteur de Gauss-Weil du vecteur formé de tous les éléments de  $M$ . Or, on remarque que pour tout  $(i_1, \dots, i_m) \in T_\delta$  et tout  $\mathbf{m} \in \mathcal{M}$  l'élément de  $M$  correspondant  $\partial^{(i_1, \dots, i_m)} \mathbf{m}(\underline{0}, \dots, \underline{0})$  est un coefficient de la forme  $\partial^{(i_1, \dots, i_m)} \mathbf{m}$  et donc on a :

$$\tilde{h}(M) \leq \tilde{h} \left( \partial^{(i_1, \dots, i_m)} \mathbf{m} ; (i_1, \dots, i_m) \in T_\delta, \mathbf{m} \in \mathcal{M} \right).$$

La hauteur du membre de droite de cette dernière inégalité est majorée -grâce au lemme 5.2- par :

$$\tilde{h} \left( \partial^{(i_1, \dots, i_m)} \mathbf{m} ; (i_1, \dots, i_m) \in T_\delta, \mathbf{m} \in \mathcal{M} \right) \leq (2\eta + 12) \cdot \max_{(i_1, \dots, i_m) \in T_\delta} (i_1 + \dots + i_m) + \varepsilon_0 \delta a_1^2 + \dots + \varepsilon_0 \delta a_m^2 + (3\eta + 11)\delta \sum_{i=1}^{m-1} (a_i^2 + 1).$$

Comme maintenant, d'après nos hypothèses, on a :

$$\varepsilon_0 \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{m-1} (a_i^2 + 1) \leq \left(1 + \frac{1}{24}\right) a_1^2$$

et pour tout  $(i_1, \dots, i_m) \in T_\delta$  :

$$i_1 + \dots + i_m \leq \left( \frac{i_1}{a_1^2} + \dots + \frac{i_{m-1}}{a_{m-1}^2} + \frac{i_m}{m-1} \right) a_1^2 \leq 7\varepsilon_1 \delta a_1^2,$$

alors :

$$\tilde{h} \left( \partial^{(i_1, \dots, i_m)} \mathbf{m} ; (i_1, \dots, i_m) \in T_\delta, \mathbf{m} \in \mathcal{M} \right) \leq [14(\eta + 6)\varepsilon_1 + 4\eta + 12] \delta a_1^2.$$

D'où cette même majoration aussi pour  $\tilde{h}(M)$ , c'est-à-dire :

$$\tilde{h}(M) \leq [14(\eta + 6)\varepsilon_1 + 4\eta + 12] \delta a_1^2,$$

ce qui est l'estimation (6.2).

Afin d'établir les estimations (6.3) et (6.4), fournissons des estimations pour les deux cardinaux  $\text{card } T_\delta$  et  $\text{card } \mathcal{M}$  :

- pour  $\text{card } T_\delta$  on a (d'après le lemme 2.14.5 de l'appendice) :

$$\text{card } T_\delta \leq (1 + o(1)) \text{vol}(T_\delta) = (1 + o(\delta)) \frac{(7\varepsilon_1 \delta a_1^2) \dots (7\varepsilon_1 \delta a_{m-1}^2) 7\varepsilon_1 \delta (m-1)}{m!}$$

c'est-à-dire :

$$\text{card } T_\delta \leq \frac{(m-1)7^m \varepsilon_1^m}{m!} \delta^m a_1^2 \dots a_m^2 + o(\delta^m) \quad (6.5)$$

- et pour  $\text{card } \mathcal{M}$  on a :

$$\begin{aligned} \text{card } \mathcal{M} &= \dim \left( \frac{K[\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_m, \underline{Y}_1, \dots, \underline{Y}_{m-1}]}{I(\varphi_{\underline{a}}(E^m))} \right)_{(\varepsilon_0 \delta a_1^2, \dots, \varepsilon_0 \delta a_m^2, \delta, \dots, \delta)} \\ &= \mathcal{H}(I(\varphi_{\underline{a}}(E^m)) ; \varepsilon_0 \delta a_1^2, \dots, \varepsilon_0 \delta a_m^2, \delta, \dots, \delta) \end{aligned}$$

où  $\mathcal{H}$  désigne la fonction de Hilbert multihomogène. Mais comme on sait que lorsque  $\delta_1, \dots, \delta_m, \delta'_1, \dots, \delta'_{m-1}$  sont des entiers positifs assez grands,  $\mathcal{H}(I(\varphi_{\underline{a}}(E^m)) ; \delta_1, \dots, \delta_m, \delta'_1, \dots, \delta'_{m-1})$  coïncide avec un polynôme en  $\delta_1, \dots, \delta_m, \delta'_1, \dots, \delta'_{m-1}$  dont la partie homogène dominante vaut :

$$\sum_{\substack{\{i_1, \dots, i_m, j_1, \dots, j_{m-1}\} \subset \{0, 1\} \\ i_1 + \dots + i_m + j_1 + \dots + j_{m-1} = m}} d_{(i_1, \dots, i_m, j_1, \dots, j_{m-1})}(\varphi_{\underline{a}}(E^m)) \frac{\delta_1^{i_1} \dots \delta_m^{i_m} \delta_1'^{j_1} \dots \delta_{m-1}'^{j_{m-1}}}{i_1! \dots i_m! j_1! \dots j_{m-1}!}$$

et que c'est bien notre cas ici puisque l'entier  $\varepsilon_0 \delta$  est supposé assez grand, alors on a :

$$\begin{aligned} \text{card } \mathcal{M} &= \sum_{\substack{\{i_1, \dots, i_m, j_1, \dots, j_{m-1}\} \subset \{0, 1\} \\ i_1 + \dots + i_m + j_1 + \dots + j_{m-1} = m}} d_{(i_1, \dots, i_m, j_1, \dots, j_{m-1})}(\varphi_{\underline{a}}(E^m)) \frac{(\varepsilon_0 \delta a_1^2)^{i_1} \dots (\varepsilon_0 \delta a_m^2)^{i_m} \delta^{j_1 + \dots + j_{m-1}}}{i_1! \dots i_m! j_1! \dots j_{m-1}!} \\ &= \sum^*_{i \in I} d_{(I, J)}(\varphi_{\underline{a}}(E^m)) \prod_{i \in I} a_i^2 \delta^m \varepsilon_0^{\text{card } I} + o(\delta^m) \end{aligned}$$

où la somme  $\sum^*$  porte sur tous les couples d'ensembles  $(I, J)$  tels que  $I \subset \{1, \dots, m\}$ ,  $J \subset \{1, \dots, m-1\}$  et  $\text{card } I + \text{card } J = m$ , et la notation  $d_{(I,J)}(\varphi_{\underline{a}}(E^m))$  est celle du lemme 4.1.

En utilisant maintenant le lemme 4.1, on en déduit que :

$$\text{card } \mathcal{M} = \sum' \left( \prod_{i \in J \setminus I} a_i^2 \right) d(E)^m \cdot \prod_{i \in I} a_i^2 \cdot \varepsilon_0^{\text{card } I} + o(\delta^m)$$

où la somme  $\sum'$  porte seulement sur les couples  $(I, J)$  de la somme  $\sum^*$  vérifiant en plus : soit  $m \in I$  et  $I \cap J = \emptyset$  ou bien  $m \notin I$  et  $I \cap J$  est un singleton. D'où :

$$\begin{aligned} \text{card } \mathcal{M} &= \sum' a_1^2 \dots a_m^2 d(E)^m \delta^m \varepsilon_0^{\text{card } I} + o(\delta^m) \\ &= 3^m \delta^m a_1^2 \dots a_m^2 \left( \sum' \varepsilon_0^{\text{card } I} \right) + o(\delta^m). \end{aligned}$$

Comme on a :

$$\begin{aligned} \sum' \varepsilon_0^{\text{card } I} &= \sum_{k=1}^m \left( \binom{m-1}{k-1} + k \binom{m-1}{k} \right) \varepsilon_0^k \\ &= \varepsilon_0(1 + \varepsilon_0)^{m-1} + \varepsilon_0(m-1)(1 + \varepsilon_0)^{m-2} \\ &= \varepsilon_0(m + \varepsilon_0)(1 + \varepsilon_0)^{m-2} \end{aligned}$$

on déduit enfin que :

$$\text{card } \mathcal{M} = 3^m \varepsilon_0(m + \varepsilon_0)(1 + \varepsilon_0)^{m-2} \delta^m a_1^2 \dots a_m^2 + o(\delta^m) \quad (6.6)$$

Etablissons maintenant les deux estimations (6.3) et (6.4) : nous remarquons que l'estimation (6.4) découle immédiatement de (6.6), par ailleurs pour établir l'estimation (6.3), nous majorons grâce à (6.5) et (6.6) l'exposant de Dirichlet  $e$  par :

$$e \leq \frac{\frac{(m-1)7^m \varepsilon_1^m}{m!} \delta^m a_1^2 \dots a_m^2 + o(\delta^m)}{3^m \varepsilon_0(m + \varepsilon_0)(1 + \varepsilon_0)^{m-2} \delta^m a_1^2 \dots a_m^2 - \frac{(m-1)7^m \varepsilon_1^m}{m!} \delta^m a_1^2 \dots a_m^2 + o(\delta^m)}.$$

En posant provisoirement :

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &:= \frac{\frac{(m-1)7^m \varepsilon_1^m}{m!} \delta^m a_1^2 \dots a_m^2}{3^m \varepsilon_0(m + \varepsilon_0)(1 + \varepsilon_0)^{m-2} \delta^m a_1^2 \dots a_m^2} \\ &= \frac{m-1}{m!} \left( \frac{7}{3} \right)^m \frac{\varepsilon_1^m}{\varepsilon_0(m + \varepsilon_0)(1 + \varepsilon_0)^{m-2}} \leq \frac{1}{2} \quad (\text{d'après nos hypothèses}), \end{aligned}$$

on a enfin :

$$e \leq \frac{\varepsilon_2 + o(1)}{1 - \varepsilon_2 + o(1)} = \frac{\varepsilon_2}{1 - \varepsilon_2} + o(1) \leq 1 + o(1)$$

ce qui démontre l'estimation (6.3) et achève cette démonstration.  $\blacksquare$

En posant maintenant :

$$Q(\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_m) := P\left(\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_m, \underline{D}\left(\underline{F}^{(a_1)}(\underline{X}_1), \underline{X}_m\right), \dots, \underline{D}\left(\underline{F}^{(a_{m-1})}(\underline{X}_{m-1}), \underline{X}_m\right)\right)$$

on obtient le corollaire suivant :

**Corollaire 6.3** *Sous toutes les hypothèses de cette section, notre forme  $Q$  de  $K[\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_m]/I(E^m)$  est non nulle, de multidegré  $((2 + \varepsilon_0)\delta a_1^2, \dots, (2 + \varepsilon_0)\delta a_{m-1}^2, (2m - 2 + \varepsilon_0)\delta)$ , satisfait  $\tau^m(Q)(\underline{0}, \dots, \underline{0}) \in \mathfrak{q}_\delta$  et pour toute place  $v$  sur  $K$  on a :*

- si  $v$  est finie :  $h_v(Q) \leq h_v(P) + 4m_v\delta a_1^2$
  - et si  $v$  est infinie :  $\ell_v(Q) \leq \ell_v(P) + (4m_v + 10)\delta a_1^2$ .
- Par conséquent  $Q$  est de hauteur de Gauss-Weil majorée par :

$$[14(\eta + 6)\varepsilon_1 + 8\eta + 22]\delta a_1^2 + o(\delta).$$

**Démonstration.**— Il est immédiat -du fait que  $P$  est une forme non identiquement nulle de  $K[\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_m, \underline{Y}_1, \dots, \underline{Y}_{m-1}]$  et de multidegré  $(\varepsilon_0\delta a_1^2, \dots, \varepsilon_0\delta a_m^2, \delta, \dots, \delta)$ - que  $Q$  est une forme non identiquement nulle de  $K[\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_m]$  de multidegré  $((2 + \varepsilon_0)\delta a_1^2, \dots, (2 + \varepsilon_0)\delta a_m^2, (2m - 2 + \varepsilon_0)\delta)$ . De plus, on a clairement  $\tau^m(Q)(\underline{0}, \dots, \underline{0}) = \Omega_{\underline{a}}(P)(\underline{0}, \dots, \underline{0}) \in \mathfrak{q}_\delta$  (par construction même de notre forme  $P$ ). Par ailleurs, si  $v$  est une place finie de  $K$ , on a :

$$\begin{aligned} h_v(Q) &\leq \delta \left( 2h_v(\underline{F}^{(a_1)}) + h_v(\underline{D}) \right) + \dots + \delta \left( 2h_v(\underline{F}^{(a_{m-1})}) + h_v(\underline{D}) \right) + h_v(P) \\ &\leq \delta(3m_v a_1^2 + 3m_v) + \dots + \delta(3m_v a_{m-1}^2 + 3m_v) + h_v(P) \\ &\leq 3m_v \delta (a_1^2 + \dots + a_{m-1}^2 + m - 1) + h_v(P) \\ &\leq h_v(P) + 3m_v(1 + 1/24)\delta a_1^2 \\ &\leq h_v(P) + 4m_v\delta a_1^2, \end{aligned}$$

ce qui est l'estimation du corollaire 6.3 pour  $h_v(Q)$  dans le cas  $v$  finie.

Si maintenant  $v$  est une place infinie de  $K$ , on a le même genre d'inégalité pour les longueurs logarithmiques locales, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \ell_v(Q) &\leq \delta \left( 2\ell_v(\underline{F}^{(a_1)}) + \ell_v(\underline{D}) \right) + \dots + \delta \left( 2\ell_v(\underline{F}^{(a_{m-1})}) + \ell_v(\underline{D}) \right) + \ell_v(P) \\ &\leq \delta(3(m_v + 3)a_1^2 + 3m_v + 7) + \dots + \delta(3(m_v + 3)a_{m-1}^2 + 3m_v + 7) + \ell_v(P) \\ &\leq 3(m_v + 3)\delta(a_1^2 + \dots + a_{m-1}^2) + (3m_v + 7)(m - 1)\delta + \ell_v(P) \\ &\leq \ell_v(P) + (3m_v + 9)\delta(a_1^2 + \dots + a_{m-1}^2 + m - 1) \\ &\leq \ell_v(P) + (3m_v + 9)\delta(1 + 1/24)a_1^2 \\ &\leq \ell_v(P) + (4m_v + 10)\delta a_1^2, \end{aligned}$$

ce qui est aussi l'estimation du corollaire 6.3 pour  $\ell_v(Q)$  (dans le cas  $v$  infinie).

Finalement, pour aboutir à l'estimation du corollaire 6.3, on majore dans le cas  $v$  infinie  $\ell_v(P)$  par  $h_v(P) + o(\delta)$ , ce qui nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \forall v \in M_K^\infty : h_v(Q) &\leq \ell_v(Q) \leq \ell_v(P) + (4m_v + 10)\delta a_1^2 \\ &\leq h_v(P) + (4m_v + 10)\delta a_1^2 + o(\delta). \end{aligned}$$

Puis, en reportant dans la définition de  $\tilde{h}(Q)$  ces majorations des  $h_v(Q)$  (selon les cas  $v$  finie ou  $v$  infinie), on obtient :

$$\tilde{h}(Q) \leq \tilde{h}(P) + (4\eta + 10)\delta a_1^2 + o(\delta),$$

ce qui nous amène -en utilisant la majoration de  $\tilde{h}(P)$  donnée par la proposition 6.2- à l'estimation du corollaire 6.3 pour  $\tilde{h}(Q)$ . La démonstration est achevée. ■

## 7 Translatée de la fonction auxiliaire

Soient pour toute la suite de ce texte  $\alpha$  un réel strictement positif assez petit et  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$  des points de  $E(K)$ , différents des points de 2-torsion, représentés



respectivement dans  $\mathbb{P}_2$  par les systèmes de coordonnées projectives :  $\underline{x}_1 = (x_1 : 1 : z_1), \dots, \underline{x}_m = (x_m : 1 : z_m)$ .

Désignons par  $\widehat{h}$  la hauteur normalisée sur  $E(\overline{\mathbb{Q}})$  de la hauteur logarithmique absolue et par  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire associé à la norme de Néron-Tate  $|\cdot| := \sqrt{\widehat{h}}$  dans l'espace euclidien  $E(\overline{\mathbb{Q}}) \otimes \mathbb{R}$ .

Nous introduisons à partir de cette section les deux hypothèses  $H_1$  et  $H_2$  suivantes :

$$H_1 : \begin{cases} \bullet \forall i, j \in \{1, 2, \dots, m\}, i \neq j : & \frac{\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle}{|\mathbf{x}_i| |\mathbf{x}_j|} \geq 1 - \frac{\alpha}{4} \\ \bullet \forall i \in \{1, 2, \dots, m-1\} : & \frac{|\mathbf{x}_m|}{|\mathbf{x}_i|} \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + 1 \\ \bullet \forall i \in \{2, \dots, m\} : & \widehat{h}(\mathbf{x}_i) \geq 49\widehat{h}(\mathbf{x}_{i-1}) \\ \bullet \widehat{h}(\mathbf{x}_1) \geq 7\eta + 37 \end{cases}$$

$$H_2 : \forall v \in S \text{ et } \forall i \in \{1, \dots, m\} : |x_i|_v \leq \begin{cases} 1 & \text{si } v \text{ est finie} \\ 1 - 2/e & \text{si } v \text{ est infinie} \end{cases}$$

et  $|z_i|_v \leq \begin{cases} 1 & \text{si } v \text{ est finie} \\ 1/2 & \text{si } v \text{ est infinie} \end{cases}$ .

Posons pour tout  $i = 1, \dots, m$  :

$$a_i := \left\lfloor \frac{|\mathbf{x}_m|}{|\mathbf{x}_i|} \right\rfloor$$

où  $\lfloor \cdot \rfloor$  désigne la partie entière.

Le lemme 14.4 de l'appendice montre que les entiers positifs  $a_1, \dots, a_m$  ainsi définis vérifient bien les hypothèses du §6 précédent. Par conséquent, la proposition 6.2 et le corollaire 6.3 de ce dernier restent valables pour le présent paragraphe. En particulier, le lemme 14.4 de l'appendice montre qu'on a :

$$a_1^2 + \dots + a_m^2 \leq \left(1 + \frac{1}{48}\right) a_1^2, \quad (7.1)$$

il montre aussi qu'on a :  $a_1 \geq 7(m-1) \geq 7$  ce qui entraîne :  $m-1 \leq \frac{a_1}{7} \leq \left(\frac{a_1}{7}\right)^2$  c'est-à-dire :

$$m-1 \leq \frac{a_1^2}{49}. \quad (7.2)$$

Le lemme 14.4 montre aussi qu'on a :

$$m-1 \leq \left(1 + \frac{1}{48}\right) \alpha a_1^2. \quad (7.3)$$

Par ailleurs le lemme 14.3 de l'appendice montre qu'on a pour tout  $i = 2, \dots, m$  :

$$a_i^2 h(\mathbf{x}_i) \leq 2a_1^2 h(\mathbf{x}_1). \quad (7.4)$$

Soient aussi  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{m-1}$  les  $m-1$  points de  $E(K)$  définis par :

$$\mathbf{y}_i := a_i \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_m \quad i = 1, \dots, m-1$$

et  $\mathbf{y}$  le point de  $E^{2m-1}$  :

$$\mathbf{y} := (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{m-1}).$$

Le lemme 14.5 de l'appendice montre alors qu'on a pour tout  $i = 1, \dots, m-1$  :

$$\widehat{h}(a_i \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_m) \leq \alpha \left( a_i^2 \widehat{h}(\mathbf{x}_i) + \widehat{h}(\mathbf{x}_m) \right),$$

cette dernière inégalité entraîne -d'après le théorème 13.14 du formulaire- qu'on a pour tout  $i = 1, \dots, m-1$  :

$$h(\mathbf{y}_i) \leq \alpha [a_i^2 h(\mathbf{x}_i) + h(\mathbf{x}_m) + (3/4.\eta + 5)(a_i^2 + 1)] + 3/2.\eta + 8. \quad (7.5)$$

Soit enfin pour tout  $i = 1, \dots, m$  :  $\underline{y}_i =: (y_{i0} : y_{i1} : y_{i2})$  un représentant dans  $\mathbb{P}_2$  du point  $\mathbf{y}_i$ .

Désignons maintenant par  $\underline{D}^{(1)}, \dots, \underline{D}^{(m)}, \underline{D}^{(m+1)}, \dots, \underline{D}^{(2m-1)}$  des formes de  $K[\underline{X}, \underline{Y}]$ , représentant la différence dans  $E$  au voisinage de  $\{\mathbf{x}_1\} \times \{\mathbf{x}_1\}, \dots, \{\mathbf{x}_m\} \times \{\mathbf{x}_m\}, \{\mathbf{y}_1\} \times \{\mathbf{y}_1\}, \dots, \{\mathbf{y}_{m-1}\} \times \{\mathbf{y}_{m-1}\}$  respectivement, qu'on choisit de bidegrés  $(2, 2)$  et de hauteurs logarithmiques locales  $h_v$  (resp de longueurs logarithmiques locales  $\ell_v$ ) - pour une place finie (resp infinie)  $v$  de  $K$ - majorées par  $3m_v$  (resp  $3m_v + 7$ ) et de hauteurs de Gauss-Weil majorées par  $3\eta + 5$  (ceci étant possible d'après le théorème 13.1 du formulaire). En désignant toujours par  $P$  notre forme de  $\frac{K[\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_m, \underline{Y}_1, \dots, \underline{Y}_{m-1}]}{I(\varphi_{\underline{a}}(E^m))}$  construite à la proposition 6.2, soit  $\tau_{\mathbf{y}}^* P$  la forme définie par :

$$\tau_{\mathbf{y}}^* P := P \left( \underline{D}^{(1)}(\underline{X}_1, \underline{x}_1), \dots, \underline{D}^{(m)}(\underline{X}_m, \underline{x}_m), \underline{D}^{(m+1)}(\underline{Y}_1, \underline{y}_1), \dots, \underline{D}^{(2m-1)}(\underline{Y}_{m-1}, \underline{y}_{m-1}) \right).$$

**Lemme 7.1** *Les coefficients de  $\tau_{\mathbf{y}}^* P \in K[\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_m, \underline{Y}_1, \dots, \underline{Y}_{m-1}]$  sont des valeurs de formes de  $K[\underline{X}'_1, \dots, \underline{X}'_m, \underline{Y}'_1, \dots, \underline{Y}'_{m-1}]$  au point  $(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_m, \underline{y}_1, \dots, \underline{y}_{m-1})$ . Ces formes sont de multidegrés  $(2\varepsilon_0 \delta a_1^2, \dots, 2\varepsilon_0 \delta a_m^2, 2\delta, \dots, 2\delta)$  et la famille  $\mathcal{F}_1$  constituée de toutes ces formes vérifie pour toute place  $v$  de  $K$  :*

- si  $v$  est finie :

$$h_v(\mathcal{F}_1) \leq 2m_v \delta a_1^2 + h_v(P)$$

- et si  $v$  est infinie :

$$\ell_v(\mathcal{F}_1) \leq (2m_v + 4) \delta a_1^2 + \ell_v(P).$$

De plus  $\mathcal{F}_1$  est de hauteur de Gauss-Weil majorée par :

$$\tilde{h}(\mathcal{F}_1) \leq [14(\eta + 6)\varepsilon_1 + 6\eta + 16] \delta a_1^2 + o(\delta).$$

**Démonstration.**— Soit  $\overline{P} \in K[\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_m, \underline{Y}_1, \dots, \underline{Y}_{m-1}, \underline{X}'_1, \dots, \underline{X}'_m, \underline{Y}'_1, \dots, \underline{Y}'_{m-1}]$  la forme égale à :

$$P \left( \underline{D}^{(1)}(\underline{X}_1, \underline{X}'_1), \dots, \underline{D}^{(m)}(\underline{X}_m, \underline{X}'_m), \underline{D}^{(m+1)}(\underline{Y}_1, \underline{Y}'_1), \dots, \underline{D}^{(2m-1)}(\underline{Y}_{m-1}, \underline{Y}'_{m-1}) \right).$$

Il est ainsi clair qu'on a :

$$\tau_{\mathbf{y}}^* P = \overline{P} \left( \underline{X}_1, \dots, \underline{X}_m, \underline{Y}_1, \dots, \underline{Y}_{m-1}, \underline{x}_1, \dots, \underline{x}_m, \underline{y}_1, \dots, \underline{y}_{m-1} \right)$$

et donc les coefficients de  $\tau_{\mathbf{y}}^* P$  sont les valeurs des coefficients des monômes en  $\underline{X}, \underline{Y}$  de  $\overline{P}$ -vus comme formes de  $K[\underline{X}'_1, \dots, \underline{X}'_m, \underline{Y}'_1, \dots, \underline{Y}'_{m-1}]$ - au point  $(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_m, \underline{y}_1, \dots, \underline{y}_{m-1})$ . Par conséquent, les formes dont il s'agit dans le lemme 7.1 sont tout simplement ces coefficients de  $\overline{P}$ . Ces derniers sont effectivement des formes de  $K[\underline{X}'_1, \dots, \underline{X}'_m, \underline{Y}'_1, \dots, \underline{Y}'_{m-1}]$  de multidegrés  $(d_{\underline{X}'_1}^{\varepsilon_1} \overline{P}, \dots, d_{\underline{X}'_m}^{\varepsilon_m} \overline{P}, d_{\underline{Y}'_1}^{\varepsilon_1} \overline{P}, \dots, d_{\underline{Y}'_{m-1}}^{\varepsilon_{m-1}} \overline{P})$  et la famille  $\mathcal{F}_1$  constituant toutes ces formes vérifie clairement pour toute place  $v$  de  $K$  :  $h_v(\mathcal{F}_1) = h_v(\overline{P})$  et  $\ell_v(\mathcal{F}_1) \leq \ell_v(\overline{P})$ . Elle vérifie -par conséquent- aussi  $\tilde{h}(\mathcal{F}_1) = \tilde{h}(\overline{P})$ . La démonstration du lemme 7.1 s'achève en démontrant que les degrés de  $\overline{P}$

par rapport à  $\underline{X}'_1, \dots, \underline{X}'_m, \underline{Y}'_1, \dots, \underline{Y}'_{m-1}$  sont respectivement  $2\varepsilon_0\delta a_1^2, \dots, 2\varepsilon_0\delta a_m^2, 2\delta, \dots, 2\delta$  et que les estimations du lemme 7.1 concernant les hauteurs et les longueurs logarithmiques locales ainsi que la hauteur de Gauss-Weil sont valables même quand  $\mathcal{F}_1$  est remplacée par  $\overline{P}$ . Pour les degrés, comme la forme  $P$  est de multidegré  $(\varepsilon_0\delta a_1^2, \dots, \varepsilon_0\delta a_m^2, \delta, \dots, \delta)$  et que les formes  $\underline{D}^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, 2m-1$ ) sont toutes de bidegré  $(2, 2)$ , on a clairement :

$$d_{\underline{X}'_i}^2 \overline{P} = d_{\underline{X}'_i}^2 \overline{P} = 2\varepsilon_0\delta a_i^2 \quad \text{pour } i = 1, \dots, m \quad \text{et}$$

$$d_{\underline{Y}'_i}^2 \overline{P} = d_{\underline{Y}'_i}^2 \overline{P} = 2\delta \quad \text{pour } i = 1, \dots, m-1.$$

Par ailleurs quand  $v$  est une place finie de  $K$  on a :

$$\begin{aligned} h_v(\overline{P}) &\leq \varepsilon_0\delta a_1^2 h_v(\underline{D}^{(1)}) + \dots + \varepsilon_0\delta a_m^2 h_v(\underline{D}^{(m)}) \\ &\quad + \delta h_v(\underline{D}^{(m+1)}) + \dots + \delta h_v(\underline{D}^{(2m-1)}) + h_v(P) \\ &\leq 3m_v\varepsilon_0\delta (a_1^2 + \dots + a_m^2) + 3m_v\delta(m-1) + h_v(P) \\ &\leq 3/2(1 + 1/48)m_v\delta a_1^2 + 3/49.m_v\delta a_1^2 + h_v(P) \end{aligned}$$

où cette dernière inégalité est obtenue en majorant  $\varepsilon_0$  par  $1/2$  et en utilisant (7.1) et (7.2). D'où :

$$h_v(\overline{P}) \leq 2m_v\delta a_1^2 + h_v(P).$$

Ce qui entraîne l'estimation du lemme 7.1 pour  $h_v(\mathcal{F}_1)$  (lorsque  $v$  est finie). Si maintenant  $v$  est une place infinie de  $K$ , on a :

$$\begin{aligned} \ell_v(\overline{P}) &\leq \varepsilon_0\delta a_1^2 \ell_v(\underline{D}^{(1)}) + \dots + \varepsilon_0\delta a_m^2 \ell_v(\underline{D}^{(m)}) \\ &\quad + \delta \ell_v(\underline{D}^{(m+1)}) + \dots + \delta \ell_v(\underline{D}^{(2m-1)}) + \ell_v(P) \\ &\leq (3m_v + 7)\varepsilon_0\delta (a_1^2 + \dots + a_m^2) + (3m_v + 7)\delta(m-1) + \ell_v(P) \\ &\leq (2m_v + 4)\delta a_1^2 + \ell_v(P) \end{aligned}$$

où cette dernière inégalité est obtenue (comme dans le cas  $v$  finie) en majorant  $\varepsilon_0$  par  $1/2$  et en utilisant (7.1) et (7.2). Ce qui entraîne aussi l'estimation du lemme 7.1 pour  $\ell_v(\mathcal{F}_1)$  (lorsque  $v$  est infinie). Il résulte de ces deux estimations pour  $h_v(\overline{P})$  (quand  $v$  est finie) et  $\ell_v(\overline{P})$  (quand  $v$  est infinie) qu'on a :

$$\tilde{h}(\overline{P}) \leq (2\eta + 4)\delta a_1^2 + \tilde{h}(P) + o(\delta).$$

En reportant finalement  $\tilde{h}(P)$  par son estimation donnée à la proposition 6.2, on a :

$$\tilde{h}(\overline{P}) \leq [14(\eta + 6)\varepsilon_1 + 6\eta + 16]\delta a_1^2 + o(\delta).$$

Ce qui entraîne l'estimation du lemme 7.1 pour  $\tilde{h}(\mathcal{F}_1)$  et achève cette démonstration.  $\blacksquare$

**Lemme 7.2** *Pour tout  $(i_1, \dots, i_m) \in \mathbb{N}^m$ , les coefficients de  $\partial^{(i_1, \dots, i_m)}(\tau_{\mathbf{y}}^* P)$   $\in K[\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_m]$  sont des valeurs de formes de  $K[\underline{X}'_1, \dots, \underline{X}'_m, \underline{Y}'_1, \dots, \underline{Y}'_{m-1}]$  au point  $(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_m, \underline{y}_1, \dots, \underline{y}_{m-1})$ . Ces formes sont de multidegrés  $(2\varepsilon_0\delta a_1^2, \dots, 2\varepsilon_0\delta a_m^2, 2\delta, \dots, 2\delta)$  et pour  $T \in \mathbb{N}$ , la famille  $\mathcal{F}_2$  constituée de telles formes, correspondant à tous les  $m$ -uplets  $(i_1, \dots, i_m) \in \mathbb{N}^m$  tels que  $i_1 + \dots + i_m \leq T$  satisfait pour toute place  $v$  de  $K$  :*

- si  $v$  est finie :

$$h_v(\mathcal{F}_2) \leq 2m_v T + 9m_v\delta a_1^2 + h_v(P)$$

- et si  $v$  est infinie :

$$\ell_v(\mathcal{F}_2) \leq (2m_v + 12)T + (9m_v + 28)\delta a_1^2 + h_v(P) + o(\delta).$$

De plus  $\mathcal{F}_2$  est de hauteur de Gauss-Weil majorée par :

$$\tilde{h}(\mathcal{F}_2) \leq (2\eta + 12)T + [14(\eta + 6)\varepsilon_1 + 13\eta + 40]\delta a_1^2 + o(\delta).$$

**Démonstration.**— En écrivant :

$$\tau_{\mathbf{y}}^* P =: \sum_{\mathbf{m} \in \Gamma} \rho_{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{m}$$

où  $\Gamma$  désigne un ensemble fini de monômes unitaires de  $K[\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_m, \underline{Y}_1, \dots, \underline{Y}_{m-1}]$  de multidegrés  $(2\varepsilon_0\delta a_1^2, \dots, 2\varepsilon_0\delta a_m^2, 2\delta, \dots, 2\delta)$ , on a pour tout  $(i_1, \dots, i_m) \in \mathbb{N}^m$  :

$$\partial^{(i_1, \dots, i_m)}(\tau_{\mathbf{y}}^* P) = \sum_{\mathbf{m} \in \Gamma} \rho_{\mathbf{m}} \cdot \partial^{(i_1, \dots, i_m)} \mathbf{m}.$$

D'où, en gardant les notations du lemme 7.1 :

$$h_v(\mathcal{F}_2) \leq h_v(\mathcal{F}_1) + h_v\left(\partial^{(i_1, \dots, i_m)} \mathbf{m}, \mathbf{m} \in \Gamma, i_1 + \dots + i_m \leq T\right)$$

lorsque  $v$  est une place finie de  $K$  et :

$$\ell_v(\mathcal{F}_2) \leq \ell_v(\mathcal{F}_1) + \ell_v\left(\partial^{(i_1, \dots, i_m)} \mathbf{m}, \mathbf{m} \in \Gamma, i_1 + \dots + i_m \leq T\right) + \log \text{card } \Gamma$$

lorsque  $v$  est une place infinie de  $K$ . En utilisant maintenant les estimations du lemme 5.2 pour les hauteurs et longueurs logarithmiques locales de la famille  $\{\partial^{(i_1, \dots, i_m)} \mathbf{m}, \mathbf{m} \in \Gamma, i_1 + \dots + i_m \leq T\}$  et les estimations du lemme 7.1 pour les hauteurs et longueurs logarithmiques locales de la famille  $\mathcal{F}_1$ , on a :

- si  $v$  est une place finie de  $K$  :

$$\begin{aligned} h_v(\mathcal{F}_2) &\leq 2m_v\delta a_1^2 + h_v(P) + \left[2T + \sum_{i=1}^{m-1} 6(a_i^2 + 1)\delta\right] m_v \\ &\leq 2m_vT + 9m_v\delta a_1^2 + h_v(P) \end{aligned}$$

où cette dernière inégalité est obtenue grâce à la majoration :  $a_1^2 + \dots + a_{m-1}^2 + m - 1 \leq (1 + 1/24)a_1^2$ . L'estimation du lemme 7.2 pour  $h_v(\mathcal{F}_2)$  -lorsque  $v$  est finie- est alors démontrée.

- Et si  $v$  est une place infinie de  $K$  :

$$\begin{aligned} \ell_v(\mathcal{F}_2) &\leq (2m_v + 4)\delta a_1^2 + \ell_v(P) + \left[2T + \sum_{i=1}^{m-1} 6(a_i^2 + 1)\delta\right] m_v + 12T \\ &\quad + 2\varepsilon_0\delta (a_1^2 + \dots + a_m^2) + \sum_{i=1}^{m-1} (22a_i^2 + 18)\delta + \log \text{card } \Gamma \\ &\leq (2m_v + 12)T + [2m_v + 4 + 6(1 + 1/24)m_v + 22(1 + 1/24) + 1 + 1/48]\delta a_1^2 \\ &\quad + h_v(P) + o(\delta) \\ &\leq (2m_v + 12)T + (9m_v + 28)\delta a_1^2 + h_v(P) + o(\delta) \end{aligned}$$

où l'avant dernière inégalité est obtenue en utilisant les majorations :  $a_1^2 + \dots + a_{m-1}^2 + m - 1 \leq (1 + 1/24)a_1^2$ ,  $\varepsilon_0 \leq 1/2$ ,  $a_1^2 + \dots + a_m^2 \leq (1 + 1/48)a_1^2$  et  $\ell_v(P) \leq h_v(P) + o(\delta)$  et en remarquant que  $\log \text{card } \Gamma = o(\delta)$ . Ce qui montre alors l'estimation

du lemme 7.2 pour  $\ell_v(\mathcal{F}_2)$  (dans le cas  $v$  infinie) aussi. On déduit ainsi pour la hauteur de Gauss-Weil de la famille  $\mathcal{F}_2$  la majoration suivante :

$$\tilde{h}(\mathcal{F}_2) \leq (2\eta + 12)T + [14(\eta + 6)\varepsilon_1 + 13\eta + 40]\delta a_1^2 + o(\delta).$$

Ceci achève cette démonstration.  $\blacksquare$

**Lemme 7.3** *Pour tout  $T \in \mathbb{N}$ , la famille des formes  $\partial^{(i_1, \dots, i_m)}(\tau_{\mathbf{y}}^* P)$ ,  $i_1 + \dots + i_m \leq T$  est de hauteur logarithmique locale  $h_v$  majorée par :*

$$2m_v T + 9m_v \delta a_1^2 + h_v(P) + 2\varepsilon_0 \delta (a_1^2 h_v(\underline{x}_1) + \dots + a_m^2 h_v(\underline{x}_m)) \\ + 2\delta (h_v(\underline{y}_1) + \dots + h_v(\underline{y}_{m-1}))$$

*lorsque  $v$  est une place finie de  $K$  et par :*

$$(2m_v + 12)T + (9m_v + 28)\delta a_1^2 + h_v(P) + 2\varepsilon_0 \delta (a_1^2 h_v(\underline{x}_1) + \dots + a_m^2 h_v(\underline{x}_m)) \\ + 2\delta (h_v(\underline{y}_1) + \dots + h_v(\underline{y}_{m-1})) + o(\delta)$$

*lorsque  $v$  est une place infinie de  $K$ .*

*De plus elle est de hauteur de Gauss-Weil majorée par :*

$$(2\eta + 12)T + [4m(\varepsilon_0 + 2\alpha)h(\mathbf{x}_1) + 14(\eta + 6)\varepsilon_1 + (5\eta + 27)\alpha + 13\eta + 40]\delta a_1^2 \\ + o(\delta).$$

**Démonstration.**— Chaque coefficient  $c$  de l'une des formes  $\partial^{(i_1, \dots, i_m)}(\tau_{\mathbf{y}}^* P)$ ,  $i_1 + \dots + i_m \leq T$  s'écrit d'après le lemme 7.2 :

$$c = \sum_1 \gamma_c(\underline{\alpha}_1, \dots, \underline{\alpha}_m, \underline{\beta}_1, \dots, \underline{\beta}_{m-1}) \underline{x}_1^{\underline{\alpha}_1} \dots \underline{x}_m^{\underline{\alpha}_m} \underline{y}_1^{\underline{\beta}_1} \dots \underline{y}_{m-1}^{\underline{\beta}_{m-1}}$$

où la somme  $\sum_1$  porte sur tous les triplets  $\underline{\alpha}_1, \dots, \underline{\alpha}_m, \underline{\beta}_1, \dots, \underline{\beta}_{m-1}$  de  $\mathbb{N}^3$  satisfaisant :  $|\underline{\alpha}_1| = 2\varepsilon_0 \delta a_1^2, \dots, |\underline{\alpha}_m| = 2\varepsilon_0 \delta a_m^2, |\underline{\beta}_1| = |\underline{\beta}_2| = \dots = |\underline{\beta}_{m-1}| = 2\delta$  et pour tout  $c$ , la famille  $\{\gamma_c(\underline{\alpha}_1, \dots, \underline{\alpha}_m, \underline{\beta}_1, \dots, \underline{\beta}_{m-1}), \underline{\alpha}_1, \dots, \underline{\alpha}_m, \underline{\beta}_1, \dots, \underline{\beta}_{m-1}\}$ , formée de nombres de  $K$ , est de hauteur logarithmique locale  $v$ -adique  $\leq h_v(\mathcal{F}_2) \leq 2m_v T + 9m_v \delta a_1^2 + h_v(P)$  lorsque  $v$  est une place finie de  $K$  et de longueur logarithmique locale  $v$ -adique  $\leq \ell_v(\mathcal{F}_2) \leq (2m_v + 12)T + (9m_v + 28)\delta a_1^2 + h_v(P) + o(\delta)$  lorsque  $v$  est une place infinie de  $K$ . On a alors pour toute place  $v$  de  $K$  :

• si  $v$  est finie :

$$h_v(c) \leq h_v(\mathcal{F}_2) + 2\varepsilon_0 \delta a_1^2 h_v(\underline{x}_1) + \dots + 2\varepsilon_0 \delta a_m^2 h_v(\underline{x}_m) \\ + 2\delta (h_v(\underline{y}_1) + \dots + h_v(\underline{y}_{m-1})) \\ \leq 2m_v T + 9m_v \delta a_1^2 + h_v(P) + 2\varepsilon_0 \delta (a_1^2 h_v(\underline{x}_1) + \dots + a_m^2 h_v(\underline{x}_m)) \\ + 2\delta (h_v(\underline{y}_1) + \dots + h_v(\underline{y}_{m-1})) \quad (7.6)$$

• et si  $v$  est infinie :

$$h_v(c) \leq \ell_v(\mathcal{F}_2) + 2\varepsilon_0 \delta a_1^2 h_v(\underline{x}_1) + \dots + 2\varepsilon_0 \delta a_m^2 h_v(\underline{x}_m) \\ + 2\delta (h_v(\underline{y}_1) + \dots + h_v(\underline{y}_{m-1})) \\ \leq (2m_v + 12)T + (9m_v + 28)\delta a_1^2 + h_v(P) \\ + 2\varepsilon_0 \delta (a_1^2 h_v(\underline{x}_1) + \dots + a_m^2 h_v(\underline{x}_m)) \\ + 2\delta (h_v(\underline{y}_1) + \dots + h_v(\underline{y}_{m-1})) + o(\delta). \quad (7.7)$$

Les estimations locales du lemme 7.3 suivent clairement de (7.6) et (7.7) puisque ces dernières sont valables pour tout coefficient  $c$  de l'une des formes  $\partial^{(i_1, \dots, i_m)}(\tau_{\mathbf{y}}^* P)$ ,  $i_1 + \dots + i_m \leq T$ . On déduit aussi de (7.6) et (7.7) que la hauteur de Gauss-Weil de la famille des formes  $\{\partial^{(i_1, \dots, i_m)}(\tau_{\mathbf{y}}^* P), i_1 + \dots + i_m \leq T\}$  est majorée par :

$$\begin{aligned} \tilde{h}\left(\partial^{(i_1, \dots, i_m)}(\tau_{\mathbf{y}}^* P), i_1 + \dots + i_m \leq T\right) &\leq (2\eta + 12)T \\ &\quad + (9\eta + 28)\delta a_1^2 + \tilde{h}(P) + 2\varepsilon_0\delta (a_1^2 h(\mathbf{x}_1) + \dots + a_m^2 h(\mathbf{x}_m)) \\ &\quad + 2\delta (h(\mathbf{y}_1) + \dots + h(\mathbf{y}_{m-1})) + o(\delta). \end{aligned} \quad (7.8)$$

En utilisant maintenant les majorations (7.4), on a :

$$a_1^2 h(\mathbf{x}_1) + \dots + a_m^2 h(\mathbf{x}_m) \leq 2ma_1^2 h(\mathbf{x}_1) \quad (7.9)$$

et en utilisant les majorations (7.5), on a :

$$\begin{aligned} h(\mathbf{y}_1) + \dots + h(\mathbf{y}_{m-1}) &\leq \alpha [(a_1^2 h(\mathbf{x}_1) + \dots + a_{m-1}^2 h(\mathbf{x}_{m-1})) \\ &\quad + (m-1)h(\mathbf{x}_m) + (3/4\eta + 5)(a_1^2 + \dots + a_{m-1}^2 + m-1)] \\ &\quad + (3/2\eta + 8)(m-1) \\ &\leq \alpha [(4m-5)a_1^2 h(\mathbf{x}_1) + (3/4\eta + 5)(1 + 1/24)a_1^2] \\ &\quad + (3/2\eta + 8)(1 + 1/48)\alpha a_1^2 \\ &\leq \alpha [4mh(\mathbf{x}_1) + 5/2\eta + 27/2] a_1^2 \end{aligned} \quad (7.10)$$

où l'avant dernière inégalité est obtenue grâce aux majorations (7.4), la majoration  $a_1^2 + \dots + a_{m-1}^2 + m-1 \leq (1+1/24)a_1^2$  et la majoration (7.3). En reportant finalement les deux majorations (7.9) et (7.10) ainsi que l'estimation de  $\tilde{h}(P)$  donnée par la proposition 6.2 dans (7.8) on obtient finalement :

$$\begin{aligned} \tilde{h}\left(\partial^{(i_1 + \dots + i_m)}(\tau_{\mathbf{y}}^* P), i_1 + \dots + i_m \leq T\right) &\leq (2\eta + 12)T + [4m(\varepsilon_0 + 2\alpha)h(\mathbf{x}_1) \\ &\quad + 14(\eta + 6)\varepsilon_1 + (5\eta + 27)\alpha + 13\eta + 40]\delta a_1^2 + o(\delta) \end{aligned}$$

ce qui achève cette démonstration.  $\blacksquare$

## 8 Extrapolation

Soit pour toute la suite de ce texte  $\varepsilon$  un réel strictement positif assez petit. Les paramètres  $\varepsilon_0, \varepsilon_1$  et  $\alpha$  seront choisis à la fin en fonction de  $\varepsilon, D, m$  et  $\eta$ . Par ailleurs, dans le but de démontrer les théorèmes principaux 2.1, 2.2 et 2.3, introduisons  $S$  un ensemble fini de places sur  $K$  et  $(\lambda_v)_{v \in S}$  une famille de réels positifs satisfaisants :

$$\sum_{v \in S} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \lambda_v = 1.$$

Outre les hypothèses des §§6 et 7 précédents, on fait, dans le présent paragraphe, les hypothèses supplémentaires suivantes :

**H<sub>3</sub>**:  $4m(\varepsilon_0 + 2\alpha) \leq \varepsilon\varepsilon_1$ .

**H<sub>4</sub>**:  $\hat{h}(\mathbf{x}_1) \geq \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_1} \{(28\eta + 176)\varepsilon_1 + (7\eta + 36)\alpha + (18\eta + 54)\} + \frac{3}{4}\eta + 5$ .

**H<sub>5</sub>**: (l'hypothèse principale)

$$\forall i \in \{1, \dots, m\}, \forall v \in S : \text{dist}_v(\mathbf{x}_i, \mathbf{0}) < e^{-\lambda_v \varepsilon h(\mathbf{x}_i) - 2m_v - c_v},$$

où  $c_v$  est une constante dépendant de  $v$  déjà introduite au §2, qui vaut 0 si  $v$  est finie et 16 si  $v$  est infinie.

**Proposition 8.1** On a :

$$\Omega_{\underline{a}}(\tau_{\mathbf{y}}^* P)(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_m) = \sum_{i_1 \geq 0, \dots, i_m \geq 0} f_{i_1, \dots, i_m} u_1^{i_1} \dots u_m^{i_m}$$

où les  $f_{i_1, \dots, i_m} := \frac{\partial^{(i_1, \dots, i_m)}(\tau_{\mathbf{y}}^* P)(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_m)}{\Delta(\underline{x}_1)^{f(i_1)} \dots \Delta(\underline{x}_m)^{f(i_m)}}$ ,  $(i_1, \dots, i_m) \in \mathbb{N}^m$  sont des nombres de  $K$ , nuls pour  $\underline{i} = (i_1, \dots, i_m) \in T_\delta$  et vérifiant pour tout  $\underline{i} \in \mathbb{N}^m$  et pour toute place  $v \in S$  :

$$\begin{aligned} |f_{\underline{i}}|_v \leq \exp \Big\{ & 9m_v \delta a_1^2 + h_v(P) + 2\varepsilon_0 \delta (a_1^2 h_v(\underline{x}_1) + \dots + a_m^2 h_v(\underline{x}_m)) \\ & + 2\delta (h_v(\underline{y}_1) + \dots + h_v(\underline{y}_{m-1})) \Big\} (e^{2m_v})^{i_1 + \dots + i_m} \end{aligned}$$

si  $v$  est finie et :

$$\begin{aligned} |f_{\underline{i}}|_v \leq \exp \Big\{ & (9m_v + 28)\delta a_1^2 + h_v(P) + 2\varepsilon_0 \delta (a_1^2 h_v(\underline{x}_1) + \dots + a_m^2 h_v(\underline{x}_m)) \\ & + 2\delta (h_v(\underline{y}_1) + \dots + h_v(\underline{y}_{m-1})) + o(\delta) \Big\} (e^{2m_v + 13})^{i_1 + \dots + i_m} \end{aligned}$$

si  $v$  est infinie.

**Démonstration.**— Le fait que les  $f_{\underline{i}}$  ( $\underline{i} \in \mathbb{N}^m$ ) sont nuls pour  $\underline{i} \in T_\delta$  vient de ce que notre forme  $P$  satisfait -par construction même- la condition d'annulation :  $\Omega_{\underline{a}}(P)(\underline{0}, \dots, \underline{0}) \in \mathfrak{q}_\delta$ . Par ailleurs, écrivons pour un  $(i_1, \dots, i_m) \in \mathbb{N}^m$  :

$$\partial^{(i_1, \dots, i_m)}(\tau_{\mathbf{y}}^* P)(\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_m) = \sum_{|\underline{\alpha}_1|=d_1, \dots, |\underline{\alpha}_m|=d_m} \lambda(\underline{\alpha}_1, \dots, \underline{\alpha}_m) \underline{X}_1^{\underline{\alpha}_1} \dots \underline{X}_m^{\underline{\alpha}_m}$$

où  $d_1, \dots, d_m$  sont les degrés de la forme  $\partial^{(i_1, \dots, i_m)}(\tau_{\mathbf{y}}^* P)$  par rapport à  $\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_m$  respectivement et la famille  $\{\lambda(\underline{\alpha}_1, \dots, \underline{\alpha}_m), \underline{\alpha}_1, \dots, \underline{\alpha}_m\}$ , constituée de nombres de  $K$ , de hauteur logarithmique  $v$ -adique (pour une place quelconque  $v$  de  $K$ ) majorée par le lemme 7.3. En spécialisant  $(\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_m)$  en  $(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_m)$  on a :

$$\partial^{(i_1, \dots, i_m)}(\tau_{\mathbf{y}}^* P)(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_m) = \sum_{|\underline{\alpha}_1|=d_1, \dots, |\underline{\alpha}_m|=d_m} \lambda(\underline{\alpha}_1, \dots, \underline{\alpha}_m) \underline{x}_1^{\underline{\alpha}_1} \dots \underline{x}_m^{\underline{\alpha}_m}.$$

D'où, pour toute place  $v \in S$  :

$$\begin{aligned} & |\partial^{(i_1, \dots, i_m)}(\tau_{\mathbf{y}}^* P)(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_m)|_v \\ & \leq \begin{cases} \max \{ |\lambda(\underline{\alpha}_1, \dots, \underline{\alpha}_m)|_v, \underline{\alpha}_1, \dots, \underline{\alpha}_m \} \cdot \prod_{i=1}^m \max_{|\underline{\alpha}_i|=d_i} |\underline{x}_i^{\underline{\alpha}_i}|_v & \text{si } v \nmid \infty \\ \max \{ |\lambda(\underline{\alpha}_1, \dots, \underline{\alpha}_m)|_v, \underline{\alpha}_1, \dots, \underline{\alpha}_m \} \cdot \prod_{i=1}^m \sum_{|\underline{\alpha}_i|=d_i} |\underline{x}_i^{\underline{\alpha}_i}|_v & \text{si } v \mid \infty \end{cases} \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 7.3 pour majorer  $\max \{ |\lambda(\underline{\alpha}_1, \dots, \underline{\alpha}_m)|_v, \underline{\alpha}_1, \dots, \underline{\alpha}_m \}$  et le lemme 14.8 pour majorer les deux quantités  $\prod_{i=1}^m \max_{|\underline{\alpha}_i|=d_i} |\underline{x}_i^{\underline{\alpha}_i}|_v$  (lorsque  $v$  est finie) et  $\prod_{i=1}^m \sum_{|\underline{\alpha}_i|=d_i} |\underline{x}_i^{\underline{\alpha}_i}|_v$  (lorsque  $v$  est infinie)<sup>2</sup> on aura pour toute place  $v \in S$  :

$$\begin{aligned} |\partial^{(i_1, \dots, i_m)}(\tau_{\mathbf{y}}^* P)(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_m)|_v \leq \exp \Big\{ & 2m_v(i_1 + \dots + i_m) + 9m_v \delta a_1^2 \\ & + h_v(P) + 2\varepsilon_0 \delta (a_1^2 h_v(\underline{x}_1) + \dots + a_m^2 h_v(\underline{x}_m)) \\ & + 2\delta (h_v(\underline{y}_1) + \dots + h_v(\underline{y}_{m-1})) \Big\} \end{aligned} \quad (8.1)$$

<sup>2</sup>Le lemme 14.8 de l'appendice majore les deux quantités  $\prod_{i=1}^m \max_{|\underline{\alpha}_i|=d_i} |\underline{x}_i^{\underline{\alpha}_i}|_v$  (lorsque  $v$  est finie) et  $\prod_{i=1}^m \sum_{|\underline{\alpha}_i|=d_i} |\underline{x}_i^{\underline{\alpha}_i}|_v$  (lorsque  $v$  est infinie) par 1 et  $e^m \leq e^{o(\delta)}$  respectivement.

si  $v$  est finie et :

$$\begin{aligned} |\partial^{(i_1, \dots, i_m)}(\tau_{\mathbf{y}}^* P)(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_m)|_v &\leq \exp \left\{ (2m_v + 12)(i_1 + \dots + i_m) \right. \\ &\quad + (9m_v + 28)\delta a_1^2 + h_v(P) + 2\varepsilon_0 \delta (a_1^2 h_v(\underline{x}_1) + \dots + a_m^2 h_v(\underline{x}_m)) \\ &\quad \left. + 2\delta (h_v(\underline{y}_1) + \dots + h_v(\underline{y}_{m-1})) + o(\delta) \right\} \end{aligned} \quad (8.2)$$

si  $v$  est infinie.

D'autre part, on a aussi d'après le lemme 14.8 de l'appendice pour toute place  $v \in S$  :

$$\frac{1}{|\Delta(\underline{x}_1)^{f(i_1)} \dots \Delta(\underline{x}_m)^{f(i_m)}|_v} \leq \begin{cases} 1 & \text{si } v \nmid \infty \\ \sqrt{e^{f(i_1) + \dots + f(i_m)}} \leq e^{i_1 + \dots + i_m} & \text{si } v \mid \infty \end{cases}. \quad (8.3)$$

La proposition 8.1 suit finalement des trois majorations (8.1), (8.2) et (8.3) puisqu'on a pour tout  $(i_1, \dots, i_m) \in \mathbb{N}^m$  et toute place  $v \in S$  :

$$|f_{i_1, \dots, i_m}|_v = |\partial^{(i_1, \dots, i_m)}(\tau_{\mathbf{y}}^* P)(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_m)|_v \cdot \frac{1}{|\Delta(\underline{x}_1)^{f(i_1)} \dots \Delta(\underline{x}_m)^{f(i_m)}|_v}.$$

La démonstration est achevée. ■

**Corollaire 8.2** *Pour toute place  $v \in S$ , la série de la proposition 8.1 est absolument convergente en valeur absolue  $v$ -adique dès que :*

$$|u_i|_v < \begin{cases} e^{-2m_v} & \text{si } v \text{ est finie} \\ e^{-2m_v - 13} & \text{si } v \text{ est infinie} \end{cases} \quad i = 1, \dots, m.$$

En particulier, pour toute place  $v \in S$ , la série sus-citée converge absolument en valeur absolue  $v$ -adique au voisinage du point  $(-x_1, \dots, -x_m)$ .

**Démonstration.**— Etant donné une place  $v \in S$ , la condition suffisante pour la convergence absolue  $v$ -adique de la série de la proposition 8.1 est claire et entraîne -d'après l'hypothèse principale  $H_5$  et la propriété *ii*) du §2 pour la distance  $\text{dist}_v$ - la convergence absolue  $v$ -adique de cette même série au voisinage du point  $(-x_1, \dots, -x_m)$ . ■

**Lemme 8.3** *On a :*

$$\Omega_{\underline{a}}(\tau_{\mathbf{y}}^* P)(\underline{0}, \dots, \underline{0}) = \sum_{i_1 \geq 0, \dots, i_m \geq 0} g_{i_1, \dots, i_m} u_1^{i_1} \dots u_m^{i_m}$$

où les  $g_{i_1, \dots, i_m} := \partial^{(i_1, \dots, i_m)}(\tau_{\mathbf{y}}^* P)(\underline{0}, \dots, \underline{0})$ ,  $(i_1, \dots, i_m) \in \mathbb{N}^m$  sont des nombres algébriques de  $K$  satisfaisant, pour toute place  $v \in S$ , l'identité au sens  $v$ -adique :  $\forall \underline{\ell} = (\ell_1, \dots, \ell_m) \in \mathbb{N}^m$  :

$$g_{\underline{\ell}} = \sum_{\substack{i_1 \geq \ell_1, \dots, i_m \geq \ell_m \\ i \notin T_\delta}} f_{i_1, \dots, i_m} \binom{i_1}{\ell_1} \dots \binom{i_m}{\ell_m} (-x_1)^{i_1 - \ell_1} \dots (-x_m)^{i_m - \ell_m}$$

dont la série du membre droit est  $v$ -adiquement absolument convergente.

**Démonstration.**— Le fait que :

$$\Omega_{\underline{a}}(\tau_{\mathbf{y}}^* P)(\underline{0}, \dots, \underline{0}) = \sum_{i_1 \geq 0, \dots, i_m \geq 0} g_{i_1, \dots, i_m} u_1^{i_1} \dots u_m^{i_m}$$



avec les  $g_{i_1, \dots, i_m} := \partial^{(i_1, \dots, i_m)}(\tau_{\mathbf{y}}^* P)(\underline{0}, \dots, \underline{0})$ , (pour  $(i_1, \dots, i_m) \in \mathbb{N}^m$  vient immédiatement de l'application du corollaire 5.3 pour  $P_1 = \tau_{\mathbf{y}}^* P$ , en spécialisant  $(\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_m)$  à  $(\underline{0}, \dots, \underline{0})$ . Par ailleurs soit  $v$  une place fixée de  $S$  et posons  $\mathcal{S}$  la série de la proposition 8.1 :

$$\mathcal{S} := \Omega_{\underline{a}}(\tau_{\mathbf{y}}^* P)(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_m) = \sum_{i_1 \geq 0, \dots, i_m \geq 0} f_{i_1, \dots, i_m} u_1^{i_1} \dots u_m^{i_m}.$$

Comme d'après le corollaire 8.2,  $\mathcal{S}$  est  $v$ -adiquement convergente au voisinage de  $(-x_1, \dots, -x_m)$ , alors quand le point  $(u_1, \dots, u_m)$  de  $\mathbb{C}_v^m$  est suffisamment proche de  $(0, \dots, 0)$  on a au sens  $v$ -adique :

$$\begin{aligned} & \Omega_{\underline{a}}(\tau_{\mathbf{y}}^* P)(\underline{0}, \dots, \underline{0})(u_1, \dots, u_m) \\ &= \Omega_{\underline{a}}(\tau_{\mathbf{y}}^* P)(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_m)(-x_1 + u_1, \dots, -x_m + u_m) \\ &= \mathcal{S}(-x_1 + u_1, \dots, -x_m + u_m) \\ &= \sum_{i_1 \geq 0, \dots, i_m \geq 0} \frac{1}{i_1! \dots i_m!} \frac{\partial^{(i_1 + \dots + i_m)} \mathcal{S}}{\partial u_1^{i_1} \dots \partial u_m^{i_m}}(-x_1, \dots, -x_m) \cdot u_1^{i_1} \dots u_m^{i_m}. \end{aligned}$$

D'où, par identification, pour tout  $(i_1, \dots, i_m) \in \mathbb{N}^m$  :

$$g_{i_1, \dots, i_m} = \frac{1}{i_1! \dots i_m!} \frac{\partial^{(i_1 + \dots + i_m)} \mathcal{S}}{\partial u_1^{i_1} \dots \partial u_m^{i_m}}(-x_1, \dots, -x_m). \quad (8.4)$$

Du fait que la série  $\mathcal{S}$  converge absolument -au sens  $v$ -adique- au voisinage du point  $(-x_1, \dots, -x_m)$ , ses dérivées partielles de tout ordre le seront aussi et on peut intervertir, en dérivant  $\mathcal{S}$ , la sommation et la dérivation. On obtient ainsi : pour tout  $\underline{\ell} = (\ell_1, \dots, \ell_m) \in \mathbb{N}^m$  :

$$\begin{aligned} g_{\underline{\ell}} &= \frac{1}{\ell_1! \dots \ell_m!} \frac{\partial^{|\underline{\ell}|} \mathcal{S}}{\partial u_1^{\ell_1} \dots \partial u_m^{\ell_m}}(-x_1, \dots, -x_m) \\ &= \sum_{i_1 \geq \ell_1, \dots, i_m \geq \ell_m} f_{i_1, \dots, i_m} \binom{i_1}{\ell_1} \dots \binom{i_m}{\ell_m} (-x_1)^{i_1 - \ell_1} \dots (-x_m)^{i_m - \ell_m} \\ &= \sum_{\substack{i_1 \geq \ell_1, \dots, i_m \geq \ell_m \\ \underline{i} \notin T_{\delta}}} f_{i_1, \dots, i_m} \binom{i_1}{\ell_1} \dots \binom{i_m}{\ell_m} (-x_1)^{i_1 - \ell_1} \dots (-x_m)^{i_m - \ell_m} \end{aligned}$$

où cette dernière égalité tient du fait que les  $f_{i_1, \dots, i_m}$  sont nuls pour  $(i_1, \dots, i_m) \in T_{\delta}$ . La démonstration est achevée. ■

**Proposition 8.4** On a :  $g_{\underline{\ell}} = 0$ ,  $\forall \underline{\ell} \in T_{\delta/2}$ .

**Démonstration.**— Procédons par l'absurde, c'est-à-dire supposons que pour un certain  $\underline{\ell} \in T_{\delta/2}$  on ait  $g_{\underline{\ell}} \neq 0$ . Ainsi, comme  $g_{\underline{\ell}} \in K$ ,  $g_{\underline{\ell}}$  doit satisfaire la formule du produit :

$$\sum_{v \in M_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log |g_{\underline{\ell}}|_v = 0. \quad (8.5)$$

Nous allons montrer que (8.5) ne peut pas avoir lieu et ceci en majorant son membre gauche par une quantité strictement négative. Majorons, pour toute place  $v$  sur  $K$ , le nombre  $\log |g_{\underline{\ell}}|_v$ . Pour ce faire on distingue les quatres cas suivants :

1<sup>er</sup> cas : (si  $v \in S$  et  $v$  est finie)

Dans ce premier cas on utilise l'identité du lemme 8.3 pour majorer  $\log |g_{\underline{\ell}}|_v$ . Cette dernière montre qu'on a :

$$|g_{\underline{\ell}}|_v \leq \max_{\substack{\underline{i} \geq \underline{\ell} \\ \underline{i} \notin T_{\delta}}} \left\{ |f_{\underline{i}}|_v \cdot |x_1|_v^{i_1 - \ell_1} \dots |x_m|_v^{i_m - \ell_m} \right\}$$

où  $\underline{i} \geq \underline{\ell}$  veut dire  $i_n \geq \ell_n \forall n \in \{1, \dots, m\}$ . Puis en utilisant la majoration de la proposition 8.1 pour les  $|f_{\underline{i}}|_v$  ( $\underline{i} \in \mathbb{N}^m$ ) on obtient :

$$\begin{aligned} |g_{\underline{\ell}}|_v &\leq \exp \left\{ 9m_v \delta a_1^2 + h_v(P) + 2\varepsilon_0 \delta (a_1^2 h_v(\underline{x}_1) + \dots + a_m^2 h_v(\underline{x}_m)) \right. \\ &\quad \left. + 2\delta (h_v(\underline{y}_1) + \dots + h_v(\underline{y}_{m-1})) \right\} \\ &\times \max_{\substack{\underline{i} \geq \underline{\ell} \\ \underline{i} \notin T_{\delta}}} \left\{ (e^{2m_v})^{i_1 + \dots + i_m} |x_1|_v^{i_1 - \ell_1} \dots |x_m|_v^{i_m - \ell_m} \right\}. \end{aligned}$$

En faisant maintenant -dans le maximum du membre de droite de cette dernière inégalité- le changement d'indice  $\underline{j} = \underline{i} - \underline{\ell}$  et en remarquant que pour tout  $\underline{i} \geq \underline{\ell}$  :  $\underline{i} \notin T_{\delta} \Rightarrow \underline{j} \notin T_{\delta/2}$  (car  $\underline{\ell} \in T_{\delta/2}$ ), on a -a fortiori- l'inégalité :

$$\begin{aligned} |g_{\underline{\ell}}|_v &\leq \exp \left\{ 9m_v \delta a_1^2 + h_v(P) + 2\varepsilon_0 \delta (a_1^2 h_v(\underline{x}_1) + \dots + a_m^2 h_v(\underline{x}_m)) \right. \\ &\quad \left. + 2\delta (h_v(\underline{y}_1) + \dots + h_v(\underline{y}_{m-1})) \right\} \cdot (e^{2m_v})^{|\underline{\ell}|} \\ &\times \max_{\underline{j} \notin T_{\delta/2}} \left\{ (e^{2m_v})^{|\underline{j}|} \prod_{k=1}^m |x_k|_v^{j_k} \right\}. \end{aligned}$$

Or, d'après notre hypothèse principale  $H_5$  et la propriété *ii*) du §2 pour la distance  $\text{dist}_v$ , on a bien pour tout  $k \in \{1, \dots, m\}$  :

$$|x_k|_v < e^{-\lambda_v \varepsilon h(\mathbf{x}_k) - 2m_v}.$$

On obtient, grâce à ces dernières inégalités :

$$\begin{aligned} |g_{\underline{\ell}}|_v &\leq \exp \left\{ 9m_v \delta a_1^2 + h_v(P) + 2\varepsilon_0 \delta (a_1^2 h_v(\underline{x}_1) + \dots + a_m^2 h_v(\underline{x}_m)) \right. \\ &\quad \left. + 2\delta (h_v(\underline{y}_1) + \dots + h_v(\underline{y}_{m-1})) \right\} \cdot (e^{2m_v})^{|\underline{\ell}|} \\ &\times \max_{\underline{j} \notin T_{\delta/2}} e^{-\varepsilon \lambda_v \left\{ \sum_{k=1}^m j_k h(\mathbf{x}_k) \right\}}. \end{aligned}$$

D'où, en passant aux logarithmes :

$$\begin{aligned} \log |g_{\underline{\ell}}|_v &\leq 9m_v \delta a_1^2 + h_v(P) + 2\varepsilon_0 \delta (a_1^2 h_v(\underline{x}_1) + \dots + a_m^2 h_v(\underline{x}_m)) \\ &\quad + 2\delta (h_v(\underline{y}_1) + \dots + h_v(\underline{y}_{m-1})) + 2m_v |\underline{\ell}| \\ &\quad - \varepsilon \lambda_v \min_{\underline{j} \notin T_{\delta/2}} \left\{ \sum_{k=1}^m j_k h(\mathbf{x}_k) \right\}. \end{aligned}$$

Remarquons maintenant que pour tout  $\underline{j} \notin T_{\delta/2}$  (c'est-à-dire :  $\frac{j_1}{a_1^2} + \dots + \frac{j_{m-1}}{a_{m-1}^2} + \frac{j_m}{m-1} > \frac{7}{2}\varepsilon_1 \delta$ ) on a :

$$\begin{aligned} &j_1 h(\mathbf{x}_1) + \dots + j_m h(\mathbf{x}_m) \\ &\geq \frac{j_1}{a_1^2} (a_1^2 h(\mathbf{x}_1)) + \dots + \frac{j_{m-1}}{a_{m-1}^2} (a_{m-1}^2 h(\mathbf{x}_{m-1})) + \frac{j_m}{m-1} (a_m^2 h(\mathbf{x}_m)) \\ &\geq \frac{j_1}{a_1^2} \left( \frac{1}{2} a_1^2 h(\mathbf{x}_1) \right) + \dots + \frac{j_{m-1}}{a_{m-1}^2} \left( \frac{1}{2} a_1^2 h(\mathbf{x}_1) \right) + \frac{j_m}{m-1} \left( \frac{1}{2} a_1^2 h(\mathbf{x}_1) \right) \quad (8.6) \\ &\geq \frac{1}{2} a_1^2 h(\mathbf{x}_1) \left( \frac{j_1}{a_1^2} + \dots + \frac{j_{m-1}}{a_{m-1}^2} + \frac{j_m}{m-1} \right) \\ &\geq \frac{7}{4} \varepsilon_1 \delta a_1^2 h(\mathbf{x}_1). \end{aligned}$$

En utilisant (8.6) et en majorant  $|\underline{\ell}|$  par :

$$|\underline{\ell}| \leq a_1^2 \left( \frac{\ell_1}{a_1^2} + \cdots + \frac{\ell_{m-1}}{a_{m-1}^2} + \frac{\ell_m}{m-1} \right) \leq a_1^2 \cdot \frac{7}{2} \varepsilon_1 \delta = \frac{7}{2} \varepsilon_1 \delta a_1^2$$

(car  $\underline{\ell} \in T_{\delta/2}$ ), on aura finalement :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \log |g_{\underline{\ell}}|_v &\leq \left[ -\frac{7}{4} \lambda_v \varepsilon \varepsilon_1 h(\mathbf{x}_1) + (7\varepsilon_1 + 9)m_v \right] \delta a_1^2 + h_v(P) \\ &\quad + 2\varepsilon_0 \delta (a_1^2 h_v(\underline{x}_1) + \cdots + a_m^2 h_v(\underline{x}_m)) + 2\delta (h_v(\underline{y}_1) + \cdots + h_v(\underline{y}_{m-1})). \end{aligned}$$

2ème cas : (si  $v \in S$  et  $v$  est infinie)

On suit exactement la même méthode que celle du premier cas, sauf qu'ici le fait que  $v$  est infinie apporte un petit changement sur la majoration de  $\log |g_{\underline{\ell}}|_v$  par rapport au premier cas. L'identité du lemme 8.3 donne la majoration :

$$|g_{\underline{\ell}}|_v \leq \sum_{\substack{\underline{i} \geq \underline{\ell} \\ \underline{i} \notin T_{\delta}}} |f_{\underline{i}}|_v \cdot 2^{i_1 + \cdots + i_m} \cdot |x_1|_v^{i_1 - \ell_1} \cdots |x_m|_v^{i_m - \ell_m}.$$

En utilisant ensuite la majoration de la proposition 8.1 pour les  $|f_{\underline{i}}|_v$  ( $\underline{i} \in \mathbb{N}^m$ ) on obtient :

$$\begin{aligned} |g_{\underline{\ell}}|_v &\leq \exp \left\{ (9m_v + 28)\delta a_1^2 + h_v(P) + 2\varepsilon_0 \delta (a_1^2 h_v(\underline{x}_1) + \cdots + a_m^2 h_v(\underline{x}_m)) \right. \\ &\quad \left. + 2\delta (h_v(\underline{y}_1) + \cdots + h_v(\underline{y}_{m-1})) + o(\delta) \right\} \\ &\quad \times \sum_{\substack{\underline{i} \geq \underline{\ell} \\ \underline{i} \notin T_{\delta}}} (2e^{2m_v+13})^{i_1 + \cdots + i_m} |x_1|_v^{i_1 - \ell_1} \cdots |x_m|_v^{i_m - \ell_m}. \end{aligned}$$

En faisant le changement d'indice  $\underline{j} = \underline{i} - \underline{\ell}$  dans la somme intervenant dans le deuxième membre de cette dernière inégalité, grâce à la remarque faite au premier cas, on obtient -a fortiori- l'inégalité :

$$\begin{aligned} |g_{\underline{\ell}}|_v &\leq \exp \left\{ (9m_v + 28)\delta a_1^2 + h_v(P) + 2\varepsilon_0 \delta (a_1^2 h_v(\underline{x}_1) + \cdots + a_m^2 h_v(\underline{x}_m)) \right. \\ &\quad \left. + 2\delta (h_v(\underline{y}_1) + \cdots + h_v(\underline{y}_{m-1})) + o(\delta) \right\} \cdot (2e^{2m_v+13})^{|\underline{\ell}|} \\ &\quad \times \sum_{\substack{\underline{j} \notin T_{\delta/2}}} \left\{ (2e^{2m_v+13})^{|\underline{j}|} \prod_{k=1}^m |x_k|_v^{j_k} \right\}. \end{aligned}$$

Or, d'après notre hypothèse principale  $\mathbf{H}_5$  et la propriété *ii*) du §2 pour la distance  $\text{dist}_v$ , on a bien pour tout  $k \in \{1, \dots, m\}$  :

$$|x_k|_v < e^{-\lambda_v \varepsilon h(\mathbf{x}_k) - 2m_v - 16}.$$

Grâce à ces dernières inégalités on obtient :

$$\begin{aligned} |g_{\underline{\ell}}|_v &\leq \exp \left\{ (9m_v + 28)\delta a_1^2 + h_v(P) + 2\varepsilon_0 \delta (a_1^2 h_v(\underline{x}_1) + \cdots + a_m^2 h_v(\underline{x}_m)) \right. \\ &\quad \left. + 2\delta (h_v(\underline{y}_1) + \cdots + h_v(\underline{y}_{m-1})) + o(\delta) \right\} \cdot (2e^{2m_v+13})^{|\underline{\ell}|} \\ &\quad \times \sum_{\substack{\underline{j} \notin T_{\delta/2}}} \left( \frac{2}{e^3} \right)^{|\underline{j}|} e^{-\varepsilon \lambda_v \left\{ \sum_{k=1}^m j_k h(\mathbf{x}_k) \right\}}. \end{aligned}$$

D'une part, d'après (8.6) : pour tout  $\underline{j} \notin T_{\delta/2}$  on a :  $\sum_{k=1}^m j_k h(\mathbf{x}_k) \geq \frac{7}{4}\varepsilon_1 \delta a_1^2 h(\mathbf{x}_1)$   
et d'autre part, comme :

$$\underline{j} \notin T_{\delta/2} \implies |\underline{j}| = j_1 + \dots + j_m \geq \frac{j_1}{a_1^2} + \dots + \frac{j_{m-1}}{a_{m-1}^2} + \frac{j_m}{m-1} > \frac{7}{2}\varepsilon_1 \delta,$$

on a :

$$\begin{aligned} \sum_{\underline{j} \notin T_{\delta/2}} \left(\frac{2}{e^3}\right)^{|\underline{j}|} &\leq \sum_{\underline{j}/|\underline{j}| \geq \frac{7}{2}\varepsilon_1 \delta} \left(\frac{2}{e^3}\right)^{|\underline{j}|} \\ &\leq \sum_{j \geq \frac{7}{2}\varepsilon_1 \delta} \binom{j+m-1}{m-1} \left(\frac{2}{e^3}\right)^j \quad (\text{en posant } j = |\underline{j}|) \\ &\leq \sum_{j \geq \frac{7}{2}\varepsilon_1 \delta} 2^{j+m-1} \left(\frac{2}{e^3}\right)^j \\ &\leq 2^{m-1} \sum_{j \geq \frac{7}{2}\varepsilon_1 \delta} \left(\frac{4}{e^3}\right)^j \\ &\leq 2^{m-1} \left(\frac{4}{e^3}\right)^{\frac{7}{2}\varepsilon_1 \delta} \frac{1}{1 - \frac{4}{e^3}} \end{aligned}$$

puis :

$$\begin{aligned} \sum_{\underline{j} \notin T_{\delta/2}} \left(\frac{2}{e^3}\right)^{|\underline{j}|} &\leq 2^m \left(\frac{4}{e^3}\right)^{\frac{7}{2}\varepsilon_1 \delta} \quad \left(\text{car } \frac{1}{1 - \frac{4}{e^3}} < 2\right) \\ &\leq e^{o(\delta)}. \end{aligned}$$

La dernière estimation pour  $|g_{\underline{\ell}}|_v$  entraîne alors qu'on a :

$$\begin{aligned} |g_{\underline{\ell}}|_v &\leq \exp \left\{ (9m_v + 28)\delta a_1^2 + h_v(P) + 2\varepsilon_0 \delta (a_1^2 h_v(\underline{x}_1) + \dots + a_m^2 h_v(\underline{x}_m)) \right. \\ &\quad \left. + 2\delta (h_v(\underline{y}_1) + \dots + h_v(\underline{y}_{m-1})) + o(\delta) \right\} \cdot (2e^{2m_v+13})^{|\underline{\ell}|} \cdot e^{-\frac{7}{4}\lambda_v \varepsilon \varepsilon_1 \delta a_1^2 h(\mathbf{x}_1)}. \end{aligned}$$

D'où, en passant aux logarithmes et en majorant  $|\underline{\ell}|$  par  $\frac{7}{2}\varepsilon_1 \delta a_1^2$  (comme dans le premier cas) et  $\frac{7}{2}(13 + \log 2)$  par 48, on aura finalement :

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \log |g_{\underline{\ell}}|_v &\leq \left[ -\frac{7}{4}\lambda_v \varepsilon \varepsilon_1 h(\mathbf{x}_1) + (7\varepsilon_1 + 9)m_v + 48\varepsilon_1 + 28 \right] \delta a_1^2 + h_v(P) \\ &\quad + 2\varepsilon_0 \delta (a_1^2 h_v(\underline{x}_1) + \dots + a_m^2 h_v(\underline{x}_m)) + 2\delta (h_v(\underline{y}_1) + \dots + h_v(\underline{y}_{m-1})) + o(\delta). \end{aligned}$$

3<sup>ème</sup> cas : (si  $v \notin S$  et  $v$  est finie)

Dans les deux cas restants, on majore naïvement le nombre  $\log |g_{\underline{\ell}}|_v$ , c'est-à-dire on utilise l'identité de définition :

$$g_{\underline{\ell}} := \partial^{\underline{\ell}}(\tau_{\mathbf{y}}^* P)(\underline{0}, \dots, \underline{0})$$

qui montre que  $g_{\underline{\ell}}$  est un coefficient de la forme  $\partial^{\underline{\ell}}(\tau_{\mathbf{y}}^* P)$ , par suite on a évidemment :

$$\log |g_{\underline{\ell}}|_v = h_v(g_{\underline{\ell}}) \leq h_v(\partial^{\underline{\ell}}(\tau_{\mathbf{y}}^* P)).$$

En majorant maintenant  $h_v(\partial^{\underline{\ell}}(\tau_{\mathbf{y}}^* P))$  à l'aide du lemme 7.3 on obtient (comme  $v$  est finie) :

$$\begin{aligned} \log |g_{\underline{\ell}}|_v &\leq 2m_v |\underline{\ell}| + 9m_v \delta a_1^2 + h_v(P) + 2\varepsilon_0 \delta (a_1^2 h_v(\underline{x}_1) + \dots + a_m^2 h_v(\underline{x}_m)) \\ &\quad + 2\delta (h_v(\underline{y}_1) + \dots + h_v(\underline{y}_{m-1})). \end{aligned}$$

Et en majorant finalement  $|\underline{\ell}|$  par  $\frac{7}{2}\varepsilon_1\delta a_1^2$  -comme dans le premier et le second cas- il vient :

$$(c) \quad \log |g_{\underline{\ell}}|_v \leq (7\varepsilon_1 + 9)m_v\delta a_1^2 + h_v(P) + 2\varepsilon_0\delta(a_1^2h_v(\underline{x}_1) + \cdots + a_m^2h_v(\underline{x}_m)) \\ + 2\delta(h_v(\underline{y}_1) + \cdots + h_v(\underline{y}_{m-1})).$$

4<sup>ème</sup> cas : (si  $v \notin S$  et  $v$  est infinie)

Comme dans le troisième cas, on a :

$$\log |g_{\underline{\ell}}|_v \leq h_v(\partial^{\underline{\ell}}(\tau_{\mathbf{y}}^*P)) \\ \leq (2m_v + 12)|\underline{\ell}| + (9m_v + 28)\delta a_1^2 + h_v(P) \\ + 2\varepsilon_0\delta(a_1^2h_v(\underline{x}_1) + \cdots + a_m^2h_v(\underline{x}_m)) + 2\delta(h_v(\underline{y}_1) + \cdots + h_v(\underline{y}_{m-1})) + o(\delta),$$

où la dernière inégalité provient du lemme 7.3.

Il ne reste qu'à majorer  $|\underline{\ell}|$  par  $\frac{7}{2}\varepsilon_1\delta a_1^2$  (comme dans les cas précédents) pour obtenir :

$$\log |g_{\underline{\ell}}|_v \leq [(7\varepsilon_1 + 9)m_v + (42\varepsilon_1 + 28)]\delta a_1^2 + h_v(P) \\ + 2\varepsilon_0\delta(a_1^2h_v(\underline{x}_1) + \cdots + a_m^2h_v(\underline{x}_m)) + 2\delta(h_v(\underline{y}_1) + \cdots + h_v(\underline{y}_{m-1})) + o(\delta).$$

Et a fortiori :

$$(d) \quad \log |g_{\underline{\ell}}|_v \leq [(7\varepsilon_1 + 9)m_v + (48\varepsilon_1 + 28)]\delta a_1^2 + h_v(P) \\ + 2\varepsilon_0\delta(a_1^2h_v(\underline{x}_1) + \cdots + a_m^2h_v(\underline{x}_m)) + 2\delta(h_v(\underline{y}_1) + \cdots + h_v(\underline{y}_{m-1})) + o(\delta).$$

En majorant maintenant la somme  $\sum_{v \in M_K} \frac{[K_v:\mathbb{Q}_v]}{[K:\mathbb{Q}]} \log |g_{\underline{\ell}}|_v$  à l'aide des inégalités (a), (b), (c) et (d) -selon le cas correspondant à chaque place  $v$ - et en remarquant les égalités :

$$\sum_{v \in S} \frac{[K_v:\mathbb{Q}_v]}{[K:\mathbb{Q}]} \lambda_v = 1 \quad (\text{qui est une hypothèse}), \\ \sum_{v \in S} \frac{[K_v:\mathbb{Q}_v]}{[K:\mathbb{Q}]} \eta_v =: \eta, \quad \sum_{v \in M_K} \frac{[K_v:\mathbb{Q}_v]}{[K:\mathbb{Q}]} h_v(P) =: \tilde{h}(P), \\ \sum_{v \in M_K} \frac{[K_v:\mathbb{Q}_v]}{[K:\mathbb{Q}]} h_v(\underline{x}_i) =: h(\mathbf{x}_i) \quad (\forall i \in \{1, \dots, m\}), \\ \sum_{v \in M_K} \frac{[K_v:\mathbb{Q}_v]}{[K:\mathbb{Q}]} h_v(\underline{y}_i) =: h(\mathbf{y}_i) \quad (\forall i \in \{1, \dots, m-1\}) \\ \text{et } \sum_{v \in M_K^\infty} \frac{[K_v:\mathbb{Q}_v]}{[K:\mathbb{Q}]} = 1,$$

on obtient :

$$\sum_{v \in M_K} \frac{[K_v:\mathbb{Q}_v]}{[K:\mathbb{Q}]} \log |g_{\underline{\ell}}|_v \leq \left[ -\frac{7}{4}\varepsilon_1 h(\mathbf{x}_1) + (7\varepsilon_1 + 9)\eta + (48\varepsilon_1 + 28) \right] \delta a_1^2 \\ + \tilde{h}(P) + 2\varepsilon_0\delta(a_1^2h(\mathbf{x}_1) + \cdots + a_m^2h(\mathbf{x}_m)) + 2\delta(h(\mathbf{y}_1) + \cdots + h(\mathbf{y}_{m-1})) + o(\delta).$$

En majorant finalement dans le deuxième membre de cette dernière inégalité  $\tilde{h}(P)$  par son estimation donnée à la proposition 6.2 qui est :

$$\tilde{h}(P) \leq [14(\eta + 6)\varepsilon_1 + 4\eta + 12]\delta a_1^2 + o(\delta),$$

$a_1^2 h(\mathbf{x}_1) + \dots + a_m^2 h(\mathbf{x}_m)$  par  $2ma_1^2 h(\mathbf{x}_1)$  (d'après (7.9)) et  $h(\mathbf{y}_1) + \dots + h(\mathbf{y}_{m-1})$  par  $\alpha[4mh(\mathbf{x}_1) + \frac{5}{2}\eta + \frac{27}{2}]a_1^2$  (d'après (7.10)), on a :

$$\sum_{v \in M_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log |g_{\underline{L}}|_v \leq [(4m(\varepsilon_0 + 2\alpha) - 7/4 \cdot \varepsilon \varepsilon_1)h(\mathbf{x}_1) + (21\eta + 132)\varepsilon_1 + (5\eta + 27)\alpha + (13\eta + 40)]\delta a_1^2 + o(\delta).$$

Or, d'après (8.5) le premier membre de cette inégalité est nul ; donc on doit avoir :

$$\left[ (4m(\varepsilon_0 + 2\alpha) - \frac{7}{4}\varepsilon \varepsilon_1)h(\mathbf{x}_1) + (21\eta + 132)\varepsilon_1 + (5\eta + 27)\alpha + (13\eta + 40) \right] \delta a_1^2 + o(\delta) \geq 0.$$

En divisant les deux membres de cette dernière inégalité par  $\delta a_1^2$  et en faisant tendre  $\delta$  vers l'infini on aura :

$$\left( 4m(\varepsilon_0 + 2\alpha) - \frac{7}{4}\varepsilon \varepsilon_1 \right) h(\mathbf{x}_1) + (21\eta + 132)\varepsilon_1 + (5\eta + 27)\alpha + (13\eta + 40) \geq 0;$$

c'est-à-dire :

$$\left( \frac{7}{4}\varepsilon \varepsilon_1 - 4m(\varepsilon_0 + 2\alpha) \right) h(\mathbf{x}_1) \leq (21\eta + 132)\varepsilon_1 + (5\eta + 27)\alpha + (13\eta + 40).$$

Comme maintenant -d'après l'hypothèse  $H_3$ - on a :  $\frac{7}{4}\varepsilon \varepsilon_1 - 4m(\varepsilon_0 + 2\alpha) \geq \frac{3}{4}\varepsilon \varepsilon_1$  on déduit de cette dernière inégalité :

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}_1) &\leq \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_1} \frac{4}{3} \{ (21\eta + 132)\varepsilon_1 + (5\eta + 27)\alpha + (13\eta + 40) \} \\ &< \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_1} \{ (28\eta + 176)\varepsilon_1 + (7\eta + 36)\alpha + (18\eta + 54) \}. \end{aligned}$$

En utilisant finalement le théorème 13.14 du formulaire il vient :

$$\begin{aligned} \widehat{h}(\mathbf{x}_1) &\leq h(\mathbf{x}_1) + \frac{3}{4}\eta + 5 \\ &< \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_1} \{ (28\eta + 176)\varepsilon_1 + (7\eta + 36)\alpha + (18\eta + 54) \} + \frac{3}{4}\eta + 5. \end{aligned}$$

Ce qui contredit l'hypothèse  $H_4$  et achève cette démonstration. ■

Notons respectivement par  $-\mathbf{x}_1, \dots, -\mathbf{x}_m$  les opposés des points  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$  de  $E$  et par  $-\underline{x}_1 := (-x_1 : 1 : -z_1), \dots, -\underline{x}_m := (-x_m : 1 : -z_m)$  leurs représentants dans  $\mathbb{P}_2$ .

**Corollaire 8.5** *Notre forme  $Q$  de  $K[\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_m]$  définie au §6 par :*

$$Q(\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_m) := P\left(\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_m, \underline{D}\left(\underline{F}^{(a_1)}(\underline{X}_1), \underline{X}_m\right), \dots, \underline{D}\left(\underline{F}^{(a_{m-1})}(\underline{X}_{m-1}), \underline{X}_m\right)\right)$$

*est non identiquement nulle modulo  $I(E^m)$ , de multidegré  $((2 + \varepsilon_0)\delta a_1^2, \dots, (2 + \varepsilon_0)\delta a_{m-1}^2, (2m - 2 + \varepsilon_0)\delta)$ , satisfait  $\tau^m(Q)(-\underline{x}_1, \dots, -\underline{x}_m) \in \mathfrak{q}_{\delta/2}$  et est de hauteur de Gauss-Weil majorée par :*

$$\widetilde{h}(Q) \leq [14(\eta + 6)\varepsilon_1 + 8\eta + 22] \delta a_1^2 + o(\delta).$$

**Démonstration.**— Le fait que  $Q$  est une forme de  $K[\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_m]$  non identiquement nulle modulo l'idéal  $I(E^m)$ , de multidegré  $((2 + \varepsilon_0)\delta a_1^2, \dots, (2 + \varepsilon_0)\delta a_{m-1}^2, (2m - 2 + \varepsilon_0)\delta)$  et de hauteur de Gauss-Weil majorée par  $[14(\eta + 6)\varepsilon_1 + 8\eta + 22]\delta a_1^2 + o(\delta)$  suit du corollaire 6.3. Par ailleurs la proposition 8.4 est équivalente à dire que  $\Omega_{\underline{a}}(\tau_{\mathbf{y}}^* P)(\underline{Q}, \dots, \underline{Q}) \in \mathfrak{q}_{\delta/2}$  ce qui est équivalent à dire aussi que  $\tau^m(Q)(-\underline{x}_1, \dots, -\underline{x}_m) \in \mathfrak{q}_{\delta/2}$ . Ceci achève la démonstration du corollaire 8.5. ■

## 9 Inégalité de la hauteur à la Vojta

Le théorème qui va suivre s'énonce à l'aide des paramètres  $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \alpha$  et  $m$  et sous les contraintes énoncées dans les §§6 et 8. Nous choisirons ensuite les paramètres  $\varepsilon_0, \varepsilon_1$  et  $\alpha$  en fonction de  $\varepsilon$  et  $m$  pour en déduire un théorème ne dépendant que des paramètres  $\varepsilon, m$  et des paramètres liés à la courbe elliptique  $E$ .

### 9.1 Premier théorème :

**Théorème 9.1** *Soit  $E$  une courbe elliptique définie sur un corps de nombres  $K$  de degré  $D$ , plongée dans  $\mathbb{P}_2$  à la Weierstrass, d'équation projective  $Y^2Z = 4X^3 - g_2XZ^2 - g_3Z^3$  ( $g_2, g_3 \in K$ ) et d'élément neutre (en tant que groupe) le point à l'infini  $\mathbf{0}$  représenté dans  $\mathbb{P}_2$  par les coordonnées projectives  $(0 : 1 : 0)$ . On munit  $E$  de la hauteur de Néron-Tate, notée  $\hat{h} := |\cdot|^2$ , et on se permet de plonger  $E(\overline{\mathbb{Q}})$  dans l'espace euclidien  $E(\overline{\mathbb{Q}}) \otimes \mathbb{R}$ . Soient aussi  $S$  un ensemble fini de places de  $K$ ,  $m_v$  ( $v \in M_K$ ) et  $\eta$  les réels positifs définis au §2 et  $(\lambda_v)_{v \in S}$  une famille de réels positifs satisfaisant :*

$$\sum_{v \in S} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \lambda_v = 1.$$

*Soient enfin  $\varepsilon$  un réel strictement positif,  $m$  un entier  $\geq 2$  et  $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \alpha$  des réels positifs satisfaisant les contraintes des §§6 et 8, c'est-à-dire :*

$$\varepsilon_0 \leq 1/2, \quad \frac{m-1}{m!} \left( \frac{7}{3} \right)^m \frac{\varepsilon_1^m}{\varepsilon_0(m+\varepsilon_0)(1+\varepsilon)^{m-2}} \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 4m(\varepsilon_0 + 2\alpha) \leq \varepsilon \varepsilon_1.$$

*Pour tout  $m$ -uplet  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m) \in E^m$  satisfaisant :*

$$\cos(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \geq 1 - \frac{\alpha}{4} \quad \forall i, j = 1, \dots, m,$$

$$\hat{h}(\mathbf{x}_m) \geq \hat{h}(\mathbf{x}_{m-1}) \geq \dots \geq \hat{h}(\mathbf{x}_1) \geq \left( \frac{6m^2}{\varepsilon_1} \right)^m [(71\varepsilon_1 + 55)\eta + 800\varepsilon_1 + 272]$$

$$\text{et} \quad \text{dist}_v(\mathbf{x}_i, \mathbf{0}) < e^{-\lambda_v \varepsilon h(\mathbf{x}_i) - 2m_v - c_v} \quad (\forall i \in \{1, \dots, m\}, \forall v \in S)$$

*on a l'une au moins des inégalités suivantes :*

$$\begin{aligned} \hat{h}(\mathbf{x}_2) &< \sqrt{2} \left( \frac{6m^2}{\varepsilon_1} \right)^m \hat{h}(\mathbf{x}_1) \\ &\vdots \\ \hat{h}(\mathbf{x}_{m-1}) &< \sqrt{2} \left( \frac{6m^2}{\varepsilon_1} \right)^m \hat{h}(\mathbf{x}_{m-2}) \\ \hat{h}(\mathbf{x}_m) &< \sqrt{2}(m-1) \left( \frac{6m^2}{\varepsilon_1} \right)^m \hat{h}(\mathbf{x}_{m-1}). \end{aligned}$$

La démonstration de ce théorème utilise un lemme de Roth sur une puissance d'une courbe elliptique. On utilise ici le théorème suivant qui est une conséquence du lemme de Roth de [Far] :

**Théorème 9.2** *Soit  $E$  une courbe elliptique définie sur un corps de nombres  $K$ , plongée à la Weierstrass dans le plan projectif  $\mathbb{P}_2$  et d'équation projective :  $Y^2Z = 4X^3 - g_2XZ^2 - g_3Z^3$  ( $g_2, g_3 \in K$ ). On prend la variable  $X$  comme paramètre pour  $E$  au voisinage du point à l'infini  $\mathbf{0}$  de  $E$ , représenté dans  $\mathbb{P}_2$  par  $(0 : 1 : 0)$ , qu'on considère aussi comme élément neutre de  $E$  et on pose  $\eta := h(1 : g_2 : g_3)$ . Soient aussi  $m \geq 2$  un entier positif,  $\varepsilon'$  un réel strictement positif,  $\underline{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_m) \in$*

$\mathbb{N}^{*m}$  et  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$  des points de  $E(K)$  représentés respectivement dans  $\mathbb{P}_2$  par les systèmes de coordonnées projectives :  $\underline{x}_1 = (x_1 : 1 : z_1), \dots, \underline{x}_m = (x_m : 1 : z_m)$ . Posons  $\mathbf{x}$  le point de  $E^m(K)$  :  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$ ,  $W(\underline{\delta}, m\varepsilon')$  le dessous d'escalier de  $\mathbb{N}^m$  :

$$W(\underline{\delta}, m\varepsilon') := \left\{ (\tau_1, \dots, \tau_m) \in \mathbb{N}^m / \frac{\tau_1}{\delta_1} + \dots + \frac{\tau_m}{\delta_m} < m\varepsilon' \right\}$$

et  $\Sigma(\underline{\delta}, \varepsilon')$  l'ensemble pondéré :

$$\Sigma(\underline{\delta}, \varepsilon') := W(\underline{\delta}, m\varepsilon') \times \{\mathbf{x}\}.$$

Posons par ailleurs  $\mathfrak{q}_{\underline{\delta}, m\varepsilon'}$  l'idéal de l'anneau  $K[[u_1, \dots, u_m]]$  défini par :

$$\mathfrak{q}_{\underline{\delta}, m\varepsilon'} := \{f \in K[[u_1, \dots, u_m]] / f_{i_1, \dots, i_m} = 0, \forall (i_1, \dots, i_m) \in W(\underline{\delta}, m\varepsilon')\}$$

où  $f_{i_1, \dots, i_m}$  désigne le coefficient de  $u_1^{i_1} \dots u_m^{i_m}$  dans la série  $f$  de  $K[[u_1, \dots, u_m]]$ . Soit enfin  $Q$  une forme multihomogène de  $K[\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_m]$  (où  $\underline{X}_i = (X_{i0}, X_{i1}, X_{i2})$  pour  $i = 1, \dots, m$ ), non identiquement nulle modulo  $I(E^m)$ , de multidegré  $\underline{\delta}$ . On suppose qu'on a :

$$\frac{\delta_i}{\delta_{i+1}} > \left( \frac{6m}{\varepsilon'} \right)^m \quad \text{pour } i = 1, \dots, m-1.$$

Alors, si  $Q$  s'annule sur l'ensemble pondéré  $\Sigma(\underline{\delta}, m\varepsilon')$ , c'est-à-dire si :

$$\tau^m(Q)(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_m) \in \mathfrak{q}_{\underline{\delta}, m\varepsilon'},$$

il existe une sous-variété irréductible, propre et produit  $V = V_1 \times \dots \times V_m$  de  $E^m$ , définie sur  $K$ , contenant le point  $\mathbf{x}$  de  $E^m$  et satisfaisant :

$$d(V_1) \dots d(V_m) \sum_{\ell=1}^m \delta_\ell \frac{h(V_\ell)}{d(V_\ell)} \leq 3^m \left( \frac{2(m+1)}{\varepsilon'} \right)^{m-\dim V} \left[ \tilde{h}(Q) + m(3 \log m + 7) + 12 \right. \\ \left. + [(4m\varepsilon' + 4)\eta + 70m\varepsilon' + 26](\delta_1 + \dots + \delta_m) \right].$$

**Démonstration.**— On applique le théorème 5.3 de [Far] pour  $p = m$ , les groupes algébriques  $G_1, \dots, G_p$  sont tous égaux à  $E$  et plongés dans  $\mathbb{P}_2$  à la Weierstrass,  $P = Q, \varepsilon = \varepsilon'$  et  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p, \delta_1, \dots, \delta_p, K$  restent tels qu'ils sont dans le corollaire. On a ainsi  $g_i = 1, n_i = 2$  (pour tout  $i = 1, \dots, m$ ),  $g = m$  et  $d(G_1) = \dots = d(G_m) = d(E) = 3$ . D'après le formulaire (§13), pour tout point fixé de  $E^2$ , il existe une famille de formes  $\underline{A}$  de  $K[X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2]$  de bidegré  $(2, 2)$  et de hauteur de Gauss-Weil majorée par  $3\eta + 5$ , représentant l'addition sur  $E$  au voisinage de ce point. On peut prendre alors dans cette application du théorème 5.3 de [Far]  $c = c' = 2$  et  $\tilde{h}(\underline{A}_i) \leq 3\eta + 5$  pour tout  $i = 1, \dots, m$ . Il est maintenant clair que toutes les hypothèses du théorème 5.3 de [Far] sont satisfaites, d'où l'existence d'une sous-variété irréductible propre  $V$  de  $E^m$ , définie sur  $K$ , contenant le point  $\mathbf{x}$  de  $E^m(K)$  dont toutes les composantes irréductibles sur  $\overline{K}$  sont des sous-variétés produit de  $\mathbb{P}_2^m$  et en désignant par  $\tilde{V} = V_1 \times \dots \times V_m$  une des composantes irréductibles sur  $\overline{K}$  de  $V$  contenant le point  $\mathbf{x}$ , on peut écrire :

$$V = \bigcup_{\sigma \in \text{Gal}(\overline{K}/K)} \sigma(\tilde{V}).$$

De plus, en posant  $D := \frac{d(V)}{d(\tilde{V})}$  on a :

$$Dd(V_1) \dots d(V_m) \leq \left( \frac{2m}{\varepsilon'} \right)^{m-\dim V} 3^m \quad \text{et} \quad (9.1)$$

$$Dd(V_1) \dots d(V_m) \sum_{i=1}^m \delta_i \frac{h(V_i)}{d(V_i)} \leq \left( \frac{2(m+1)}{\varepsilon'} \right)^{m-\dim V} 3^m \left[ \tilde{h}(Q) + \sum_{i=1}^m R_i \delta_i + S \right] \quad (9.2)$$



où

$$R_i := \frac{h(E)}{6} + (m-1)\varepsilon' \{4h(E) + 14\log 3 + 26\} + \tilde{h}(\underline{A}_i) + 16\log 3 + 2\log 2$$

pour tout  $i = 1, \dots, m$  et :

$$S := m(3\log m + 3\log 3 + 5\log 2) + 12.$$

Nous montrons d'abord que dans notre situation on a  $V = \tilde{V} = V_1 \times \dots \times V_m$ . Comme  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m) \in \tilde{V} = V_1 \times \dots \times V_m$ , c'est-à-dire  $\mathbf{x}_i \in V_i$  pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$  et comme pour tout  $i = 1, \dots, m$ ,  $V_i$  est une  $\overline{K}$ -sous-variété irréductible de  $E$  (car  $\tilde{V}$  est une  $\overline{K}$ -sous-variété irréductible de  $E^m$ ) et que  $E$  est de dimension 1 alors, pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ , soit  $V_i = \{\mathbf{x}_i\}$  ou bien  $V_i = E$ . On remarque que dans ces deux cas  $V_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) est définie sur  $K$ , donc  $\tilde{V} = V_1 \times \dots \times V_m$  est aussi définie sur  $K$ . Il s'ensuit que :  $\forall \sigma \in \text{Gal}(\overline{K}/K); \sigma(\tilde{V}) = \tilde{V}$ , d'où  $V = \tilde{V} = V_1 \times \dots \times V_m$ , c'est-à-dire que  $V$  est elle-même une sous-variété produit de  $E^m$ . L'entier  $D$  du théorème 5.3 de [Far] vaut alors dans cette application  $D := d(V)/d(\tilde{V}) = 1$  (car  $V = \tilde{V}$ ). Nous remarquons ainsi que l'inégalité (9.1) est triviale. En effet, puisque  $D = 1$  et  $d(V_i) \in \{1, 3\} \forall i = 1, \dots, m$  (car, comme on vient de le voir ci-dessus,  $\forall i \in \{1, \dots, m\}$  : soit  $V_i = \{\mathbf{x}_i\}$  ou bien  $V_i = E$ ) on a :  $Dd(V_1) \dots d(V_m) \leq 3^m \leq (\frac{2m}{\varepsilon'})^{m-\dim V} 3^m$ . C'est l'inégalité (9.2) par contre qui est intéressante dans notre application. Afin d'en déduire l'inégalité du corollaire, montrons que la hauteur unitaire de  $E$ ,  $h(E)$ , peut être majorée par  $\eta + 7$ . Remarquons pour cela que  $E$  est une hypersurface de  $\mathbb{P}_2$  définie par la forme  $U$  de  $K[X, Y, Z]$  (où  $U(X, Y, Z) = Y^2Z + g_2XZ^2 + g_3Z^3 - 4X^3$ ) qui est de degré 3, donc d'après [Ph4]3 (page 347) on a :  $h(E) = h(U) + 3 \sum_{i=1}^1 \sum_{j=1}^i \frac{1}{2j}$ , c'est-à-dire  $h(E) = h(U) + 3/2$ . Par ailleurs, d'après le théorème 4 de [Le] fournissant la comparaison entre hauteur unitaire et hauteur de Gauss-Weil d'une forme donnée, on a :  $h(U) \leq \tilde{h}(U) + \frac{1}{2} \log \binom{3+2}{2} + 3 \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2j}$ , c'est-à-dire  $h(U) \leq \tilde{h}(U) + \frac{1}{2} \log 10 + \frac{9}{4}$ . Enfin on a :  $\tilde{h}(U) = h(1 : -4 : g_2 : g_3) \leq h(1 : g_2 : g_3) + \log 4$ , c'est-à-dire  $\tilde{h}(U) \leq \eta + \log 4$ . Il s'ensuit finalement de toutes ces comparaisons qu'on a :  $h(E) \leq \eta + \log 4 + \frac{1}{2} \log 10 + \frac{15}{4} < \eta + 7$ . L'inégalité qui conclut le corollaire découle maintenant de (9.2) en majorant simplement  $h(E)$  par  $\eta + 7$ ,  $\tilde{h}(\underline{A})$  par  $3\eta + 5$  et en utilisant des majorations numériques triviales. La démonstration est achevée. ■

**Démonstration du théorème 9.1.**— Nous procédons par l'absurde, c'est-à-dire que nous supposons en plus de toutes les hypothèses du théorème 9.1 qu'on a :

$$\begin{aligned} \hat{h}(\mathbf{x}_2) &\geq \sqrt{2} \left( \frac{6m^2}{\varepsilon_1} \right)^m \hat{h}(\mathbf{x}_1), \\ \hat{h}(\mathbf{x}_3) &\geq \sqrt{2} \left( \frac{6m^2}{\varepsilon_1} \right)^m \hat{h}(\mathbf{x}_2), \\ &\vdots \\ \hat{h}(\mathbf{x}_{m-1}) &\geq \sqrt{2} \left( \frac{6m^2}{\varepsilon_1} \right)^m \hat{h}(\mathbf{x}_{m-2}) \\ \text{et } \hat{h}(\mathbf{x}_m) &\geq \sqrt{2}(m-1) \left( \frac{6m^2}{\varepsilon_1} \right)^m \hat{h}(\mathbf{x}_{m-1}). \end{aligned} \tag{9.3}$$

On applique maintenant le théorème 9.2 pour la courbe elliptique  $E$  et les  $m$  points  $-\mathbf{x}_1, \dots, -\mathbf{x}_m$  de  $E$ . On pose pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$  :  $a_i := [\|\mathbf{x}_m\| / \|\mathbf{x}_i\|]$  et on prend  $\varepsilon' := \frac{\varepsilon_1}{m}$ ,  $\delta_i := (2 + \varepsilon_0)\delta a_i^2$  pour  $i = 1, \dots, m-1$  et  $\delta_m := (2m-2 + \varepsilon_0)\delta$ . Le corollaire 8.5 du §8 précédent nous fournit bien

une forme  $Q$  de  $K[\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_m]$  (avec  $\underline{X}_i := (X_{i0}, X_{i1}, X_{i2})$ ), non identiquement nulle modulo l'idéal  $I(E^m)$ , de multidegré  $(\delta_1, \dots, \delta_m)$  et s'annulant sur l'ensemble pondéré  $T_{\delta/2} \times \{-\mathbf{x}\}$ . Or, un simple calcul montre que le dessous d'escalier :

$$T_{\delta/2} := \left\{ (\tau_1, \dots, \tau_m) \in \mathbb{N}^m / \frac{\tau_1}{a_1^2} + \dots + \frac{\tau_{m-1}}{a_{m-1}^2} + \frac{\tau_m}{m-1} \leq \frac{7}{2} \varepsilon_1 \delta \right\}$$

contient le dessous d'escalier :

$$W(\underline{\delta}, m\varepsilon') = W(\underline{\delta}, \varepsilon_1) := \left\{ (\tau_1, \dots, \tau_m) \in \mathbb{N}^m / \frac{\tau_1}{\delta_1} + \dots + \frac{\tau_m}{\delta_m} < \varepsilon_1 \right\};$$

donc la forme  $Q$  s'annule aussi -a fortiori- sur l'ensemble pondéré  $\Sigma(\underline{\delta}, m\varepsilon') := W(\underline{\delta}, m\varepsilon') \times \{-\mathbf{x}\}$ . Il nous reste alors -pour vérifier toutes les hypothèses du théorème [?]- qu'à montrer pour tout  $i = 1, \dots, m-1$  :  $\delta_i/\delta_{i+1} > (6m/\varepsilon')^m$ .

Pour  $i \in \{1, \dots, m-2\}$  on a :

$$\begin{aligned} \frac{\delta_i}{\delta_{i+1}} = \frac{a_i^2}{a_{i+1}^2} &\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\widehat{h}(\mathbf{x}_{i+1})}{\widehat{h}(\mathbf{x}_i)} && \text{(d'après (14.1) du lemme 14.3)} \\ &> \left( \frac{6m^2}{\varepsilon_1} \right)^m = \left( \frac{6m}{\varepsilon'} \right)^m && \text{(d'après nos hypothèses (9.3));} \end{aligned}$$

donc  $\delta_i/\delta_{i+1} > (6m/\varepsilon')^m \forall i = 1, \dots, m-2$ , et pour  $i = m-1$  on a :

$$\frac{\delta_i}{\delta_{i+1}} = \frac{\delta_{m-1}}{\delta_m} = \frac{2 + \varepsilon_0}{2m-2 + \varepsilon_0} a_{m-1}^2 > \frac{a_{m-1}^2}{m-1}$$

$$\begin{aligned} \text{et } a_{m-1}^2 = \frac{a_{m-1}^2}{a_m^2} &\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\widehat{h}(\mathbf{x}_m)}{\widehat{h}(\mathbf{x}_{m-1})} && \text{(d'après (14.1) du lemme 14.3)} \\ &> (m-1) \left( \frac{6m^2}{\varepsilon_1} \right)^m && \text{(d'après nos hypothèses (9.3));} \end{aligned}$$

donc  $\delta_i/\delta_{i+1} > (6m^2/\varepsilon_1)^m = (6m/\varepsilon')^m$  aussi pour  $i = m-1$ , d'où :  $\forall i \in \{1, \dots, m-1\}$  :  $\delta_i/\delta_{i+1} > (6m/\varepsilon')^m$ . Ainsi toutes les hypothèses du théorème 9.2 sont satisfaites, d'où l'existence d'une sous-variété irréductible, propre et produit  $V = V_1 \times \dots \times V_m$  de  $E^m$ , définie sur  $K$ , contenant le point  $(-\mathbf{x}_1, \dots, -\mathbf{x}_m)$  de  $E^m(K)$  et vérifiant :

$$\begin{aligned} d(V_1) \dots d(V_m) \sum_{i=1}^m \delta_i \frac{h(V_i)}{d(V_i)} &\leq 3^m \left( \frac{2(m+1)}{\varepsilon'} \right)^{m-\dim V} \left[ \widetilde{h}(Q) + m(3 \log m + 7) + 12 \right. \\ &\quad \left. + [(4m\varepsilon' + 4)\eta + 70m\varepsilon' + 26](\delta_1 + \dots + \delta_m) \right]. \end{aligned} \tag{9.4}$$

En majorant  $\delta_1 + \dots + \delta_m$  par :

$$\begin{aligned} \delta_1 + \dots + \delta_m &= (2 + \varepsilon_0)\delta(a_1^2 + \dots + a_{m-1}^2) + (2m-2 + \varepsilon_0)\delta \\ &\leq (2 + \varepsilon_0)\delta(a_1^2 + \dots + a_{m-1}^2 + m-1) \\ &\leq (2 + \varepsilon_0)(1 + 1/24)\delta a_1^2 \quad \text{(d'après 4) et 5) du lemme 14.4)} \\ &< 3\delta a_1^2; \end{aligned}$$

$\widetilde{h}(Q)$  par  $[14(\eta + 6)\varepsilon_1 + 8\eta + 22]\delta a_1^2 + o(\delta)$  (d'après le corollaire 8.5), l'exposant  $m - \dim V$  par  $m$  et  $m(3 \log m + 7) + 12$  par  $o(\delta)$ , un simple calcul montre que le deuxième membre de (9.4) est majoré par :

$$\left( \frac{6m(m+1)}{\varepsilon_1} \right)^m [(26\varepsilon_1 + 20)\eta + 294\varepsilon_1 + 100] \delta a_1^2 + o(\delta).$$

Par ailleurs comme la sous-variété  $V = V_1 \times \cdots \times V_m$  de  $E^m$  est irréductible, chacune des sous-variétés  $V_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) sera de même; par conséquent pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$  on a soit  $V_i$  est réduite à un point (donc dans ce cas  $V_i = \{-\mathbf{x}_i\}$ , car  $-\mathbf{x}_i \in V_i$  puisque  $(-\mathbf{x}_1, \dots, -\mathbf{x}_m) \in V$ ) ou bien  $V_i$  est égale à  $E$  tout entier. Comme maintenant on ne peut pas avoir  $V_i = E \ \forall i \in \{1, \dots, m\}$  car  $V$  est une sous-variété propre de  $E^m$ , alors il existe au moins un  $i_0 \in \{1, \dots, m\}$  tel que  $V_{i_0} = \{-\mathbf{x}_{i_0}\}$ . le premier membre de (9.4) peut être alors minoré par :

$$\begin{aligned} d(V_1) \dots d(V_m) \sum_{i=1}^m \delta_i \frac{h(V_i)}{d(V_i)} &\geq \delta_{i_0} h(\{-\mathbf{x}_{i_0}\}) = \delta_{i_0} h(\mathbf{x}_{i_0}) \\ &\geq (2 + \varepsilon_0) \delta a_{i_0}^2 h(\mathbf{x}_{i_0}) \\ &> 2 \delta a_{i_0}^2 h(\mathbf{x}_{i_0}) \\ &\geq \delta a_1^2 h(\mathbf{x}_1) \quad (\text{d'après (14.3) du lemme 14.3}). \end{aligned}$$

Il suit de cette minoration du premier membre de l'inégalité (9.4) et de la majoration précédente pour son deuxième membre qu'on a :

$$\delta a_1^2 h(\mathbf{x}_1) < \left( \frac{6m(m+1)}{\varepsilon_1} \right)^m [(26\varepsilon_1 + 20)\eta + 294\varepsilon_1 + 100] \delta a_1^2 + o(\delta).$$

Cette dernière inégalité entraîne, en divisant ces deux membres par  $\delta a_1^2$  et en faisant tendre  $\delta$  vers l'infini :

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}_1) &< \left( \frac{6m(m+1)}{\varepsilon_1} \right)^m [(26\varepsilon_1 + 20)\eta + 294\varepsilon_1 + 100] \\ &< \left( \frac{6m^2}{\varepsilon_1} \right)^m [(26e\varepsilon_1 + 20e)\eta + 294e\varepsilon_1 + 100e] \quad (\text{car } (m+1)^m < em^m) \\ &< \left( \frac{6m^2}{\varepsilon_1} \right)^m [(71\varepsilon_1 + 54, 5)\eta + 800\varepsilon_1 + 271, 9]. \end{aligned}$$

Par le théorème 13.14 du formulaire on obtient enfin :

$$\widehat{h}(\mathbf{x}_1) < \left( \frac{6m^2}{\varepsilon_1} \right)^m [(71\varepsilon_1 + 55)\eta + 800\varepsilon_1 + 272],$$

ce qui est en contradiction avec notre hypothèse :

$$\widehat{h}(\mathbf{x}_m) \geq \widehat{h}(\mathbf{x}_{m-1}) \geq \cdots \geq \widehat{h}(\mathbf{x}_1) \geq \left( \frac{6m^2}{\varepsilon_1} \right)^m [(71\varepsilon_1 + 55)\eta + 800\varepsilon_1 + 272].$$

La démonstration est achevée. ■

## 9.2 Choix des paramètres $\varepsilon_0, \varepsilon_1$ et $\alpha$ :

Soit  $E$  une courbe elliptique comme dans le théorème 9.1,  $\varepsilon$  un réel strictement positif et  $m$  un entier  $\geq 2$ . Afin d'avoir un énoncé dépendant de moins de paramètres, nous choisissons les réels strictement positifs  $\varepsilon_0, \varepsilon_1$  et  $\alpha$  en fonction de  $\varepsilon$  et  $m$  de façon à satisfaire les contraintes du théorème 9.1, qui sont :  $\varepsilon_0 \leq 1/2$ ,

$$\frac{m-1}{m!} \left( \frac{7}{3} \right)^m \frac{\varepsilon_1^m}{\varepsilon_0(m+\varepsilon_0)(1+\varepsilon_0)^{m-2}} \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad (9.5)$$

$$4m(\varepsilon_0 + 2\alpha) \leq \varepsilon \varepsilon_1. \quad (9.6)$$

La procédure pour ce choix est la suivante :

Nous remarquons que la relation (9.5) est impliquée par la relation suivante :

$$\varepsilon_0 \geq \frac{2 \left( \frac{7}{3} \right)^m}{m!} \varepsilon_1^m \quad (9.7)$$

et que la relation (9.6) est impliquée par les deux relations suivantes :

$$\varepsilon_0 \leq \frac{1}{8m} \varepsilon \varepsilon_1 \quad (9.8)$$

$$\alpha \leq \frac{1}{16m} \varepsilon \varepsilon_1. \quad (9.9)$$

Les deux relations (9.7) et (9.8) s'assemblent en la relation suivante donnant un encadrement pour le paramètre  $\varepsilon_0$  en fonction des autres paramètres :

$$\frac{2 \left(\frac{7}{3}\right)^m}{m!} \varepsilon_1^m \leq \varepsilon_0 \leq \frac{1}{8m} \varepsilon \varepsilon_1. \quad (9.10)$$

Ainsi nous venons de montrer que le théorème 9.1 reste -a fortiori- valable quand on remplace les deux contraintes (9.5) et (9.6) par les deux relations (9.9) et (9.10). Il nous suffit donc de choisir  $\varepsilon_0, \varepsilon_1$  et  $\alpha$  (en fonction de  $m$  et  $\varepsilon$ ) de façon à satisfaire (9.9) et (9.10). Nous remarquons que la relation (9.10) exige d'avoir  $\frac{2 \left(\frac{7}{3}\right)^m}{m!} \varepsilon_1^m \leq \frac{1}{8m} \varepsilon \varepsilon_1$ , c'est-à-dire d'avoir :

$$\varepsilon_1 \leq \frac{3}{7} \cdot \left(\frac{1}{38}\right)^{\frac{1}{m-1}} \cdot ((m-1)!)^{\frac{1}{m-1}} \cdot \varepsilon^{\frac{1}{m-1}}. \quad (9.11)$$

Maintenant comme  $\left(\frac{1}{38}\right)^{\frac{1}{m-1}} \geq \frac{1}{38}$  (car  $m \geq 2$ ) et  $((m-1)!)^{\frac{1}{m-1}} \geq \frac{m-1}{e}$  (car  $\forall n \in \mathbb{N}^* : \frac{n}{e} \leq (n!)^{\frac{1}{n}} \leq n$ ), alors (9.11) est impliquée par la relation :

$$\varepsilon_1 \leq \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{38} \cdot \frac{1}{e} (m-1) \cdot \varepsilon^{\frac{1}{m-1}}$$

qui est de nouveau impliquée par la suivante :

$$\varepsilon_1 \leq \frac{1}{484} m \varepsilon^{\frac{1}{m-1}} \quad (9.12)$$

puisque  $\frac{3}{7} \cdot \frac{1}{38} \cdot \frac{1}{e} > \frac{1}{242}$  et  $m-1 \geq \frac{m}{2}$  (car  $m \geq 2$ ).

En regardant maintenant l'énoncé du théorème 9.1 (inégalité de Vojta), on voit qu'on a plutôt intérêt à prendre  $\varepsilon_1$  le plus grand possible, donc le meilleur choix pour  $\varepsilon_1$  sous (9.12) est :

$$\boxed{\varepsilon_1 = \frac{1}{484} m \varepsilon^{\frac{1}{m-1}}}.$$

En reportant maintenant cette valeur de  $\varepsilon_1$  dans (9.10), on a, pour  $\varepsilon_0$ , l'encadrement suivant :

$$2 \left(\frac{7}{1452}\right)^m \frac{m^m}{m!} \varepsilon^{\frac{m}{m-1}} \leq \varepsilon_0 \leq \frac{1}{3872} \varepsilon^{\frac{m}{m-1}}.$$

Or, on peut vérifier qu'on a :  $\forall m \geq 2 : 2 \left(\frac{7}{1452}\right)^m \frac{m^m}{m!} \leq \frac{1}{4000}$  (pour montrer cela, il suffit de faire le calcul numérique pour  $m = 2$  et d'utiliser la majoration  $\frac{m^m}{m!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m^n}{n!} = e^m$  quand  $m \geq 3$ ). Le dernier encadrement pour  $\varepsilon_0$  est satisfait pour la valeur :

$$\boxed{\varepsilon_0 = \frac{1}{4000} \varepsilon^{\frac{m}{m-1}}}.$$

En reportant aussi la valeur choisie pour  $\varepsilon_1$  dans (9.9), on obtient :

$$\alpha \leq \frac{1}{7744} \varepsilon^{\frac{m}{m-1}}. \quad (9.13)$$

Le paramètre  $\alpha$  choisi, on doit recouvrir l'espace euclidien  $E(\overline{\mathbb{Q}}) \otimes \mathbb{R}$  par des cônes d'angle  $\simeq \arccos(1 - \alpha/4)$ . Or, notre souhait est d'avoir un nombre minimal de tels cônes pour ce recouvrement, donc on a plutôt intérêt à prendre ces cônes les plus larges possible, ce qui revient à choisir  $\alpha$  le plus grand possible. D'où, le meilleur choix pour  $\alpha$  sous (9.13) :

$$\alpha = \frac{1}{7744} \varepsilon^{\frac{m}{m-1}}.$$

Ce choix des paramètres  $\varepsilon_0, \varepsilon_1$  et  $\alpha$  en fonction de  $\varepsilon$  et  $m$  satisfait bien les relations (9.9) et (9.10), par conséquent il satisfait -a fortiori- les contraintes (9.5) et (9.6) du théorème 9.1. Ce dernier reste valable lorsqu'on remplace  $\varepsilon_0, \varepsilon_1$  et  $\alpha$  par les choix précédents et on obtient finalement le théorème suivant :

**Théorème 9.3** *Soit  $E$  une courbe elliptique définie sur un corps de nombres  $K$  de degré  $D$ , plongée dans  $\mathbb{P}_2$  à la Weierstrass, d'équation projective  $Y^2Z = 4X^3 - g_2XZ^2 - g_3Z^3$  ( $g_2, g_3 \in K$ ) et d'élément neutre (en tant que groupe) le point à l'infini  $\mathbf{0}$  représenté dans  $\mathbb{P}_2$  par les coordonnées projectives  $(0 : 1 : 0)$ . On munit  $E$  de la hauteur de Néron-Tate, notée  $\hat{h} := |\cdot|^2$ , et on se permet de plonger  $E(\overline{\mathbb{Q}})$  dans l'espace euclidien  $E(\overline{\mathbb{Q}}) \otimes \mathbb{R}$ . Soient aussi  $S$  un ensemble fini de places de  $K$ ,  $m_v$  ( $v \in M_K$ ) et  $\eta$  les réels positifs définis au §2 et  $(\lambda_v)_{v \in S}$  une famille de réels positifs satisfaisant :*

$$\sum_{v \in S} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \lambda_v = 1.$$

*Soient enfin  $\varepsilon$  un réel strictement positif et  $m$  un entier  $\geq 2$ . Pour tout  $m$ -uplet  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m) \in E^m$  satisfaisant :*

$$\cos(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \geq 1 - \frac{1}{30976} \varepsilon^{\frac{m}{m-1}} \quad \text{pour } i, j = 1, \dots, m,$$

$$\begin{aligned} \hat{h}(\mathbf{x}_m) &\geq \hat{h}(\mathbf{x}_{m-1}) \geq \dots \geq \hat{h}(\mathbf{x}_1) \geq \\ &(2904m)^m \left[ \{55\varepsilon^{-\frac{m}{m-1}} + m\varepsilon^{-1}\} \eta + \{272\varepsilon^{-\frac{m}{m-1}} + 2m\varepsilon^{-1}\} \right] \end{aligned}$$

$$\text{et } \text{dist}_v(\mathbf{x}_i, \mathbf{0}) < e^{-\lambda_v \varepsilon \hat{h}(\mathbf{x}_i) - 2m_v - c_v} \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \text{ et } \forall v \in S;$$

*on a l'une au moins des inégalités suivantes :*

$$\begin{aligned} \hat{h}(\mathbf{x}_2) &< \sqrt{2} (2904m)^m \varepsilon^{-\frac{m}{m-1}} \hat{h}(\mathbf{x}_1) \\ &\vdots \\ \hat{h}(\mathbf{x}_{m-1}) &< \sqrt{2} (2904m)^m \varepsilon^{-\frac{m}{m-1}} \hat{h}(\mathbf{x}_{m-2}) \\ \hat{h}(\mathbf{x}_m) &< \sqrt{2} (m-1) (2904m)^m \varepsilon^{-\frac{m}{m-1}} \hat{h}(\mathbf{x}_{m-1}). \end{aligned}$$

## 10 Inégalité de la hauteur à la Mumford

Notre but dans cette section est de démontrer le théorème suivant :

**Théorème 10.1** *Soit  $E$  une courbe elliptique définie sur un corps de nombres  $K$  de degré  $D$ , plongée dans  $\mathbb{P}_2$  à la Weierstrass, d'équation projective  $Y^2Z = 4X^3 - g_2XZ^2 - g_3Z^3$  ( $g_2, g_3 \in K$ ) et d'élément neutre (en tant que groupe) le point à l'infini  $\mathbf{0}$  représenté dans  $\mathbb{P}_2$  par les coordonnées projectives  $(0 : 1 : 0)$ . On munit  $E$  de la hauteur de Néron-Tate, notée  $\hat{h} := |\cdot|^2$ , et on se permet de plonger  $E(\overline{\mathbb{Q}})$  dans l'espace euclidien  $E(\overline{\mathbb{Q}}) \otimes \mathbb{R}$ . Soient aussi  $S$  un ensemble fini de places de  $K$ ,*

$m_v$  ( $v \in M_K$ ) et  $\eta$  les réels positifs définis au §2 et  $(\lambda_v)_{v \in S}$  une famille de réels positifs satisfaisant :

$$\sum_{v \in S} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \lambda_v = 1.$$

Soient enfin  $\varepsilon$  un réel strictement positif et  $\beta, \theta$  les deux réels positifs :  $\beta := \frac{\varepsilon}{2}$  et  $\theta := \frac{1}{3}\sqrt{\varepsilon}$ . Alors pour tout couple  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in E^2(K)$ ,  $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ , satisfaisant :

$$\cos(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \geq 1 - \frac{\beta}{4}, \quad (10.1)$$

$$\widehat{h}(\mathbf{x}_2) \geq \widehat{h}(\mathbf{x}_1) \geq \frac{1}{\varepsilon}(54\eta + 204) \text{ et} \quad (10.2)$$

$$\text{dist}_v(\mathbf{x}_j, \mathbf{0}) < e^{-\lambda_v \varepsilon h(\mathbf{x}_j) - 2m_v - c_v} \text{ pour } j = 1, 2 \text{ et } v \in S; \quad (10.3)$$

on a :

$$\widehat{h}(\mathbf{x}_2) \geq (1 + \theta)\widehat{h}(\mathbf{x}_1).$$

Avant de rentrer dans les étapes de la démonstration, expliquons grosso-modo le schéma qu'on va suivre. Nous allons procéder de la même manière que pour le théorème 9.1 (l'inégalité de la hauteur à la Vojta) sauf qu'ici la situation est beaucoup plus simple du fait que d'une part la construction des fonctions auxiliaires est explicite -donc ne nécessite pas l'utilisation du lemme de Siegel- et d'autre part qu'on n'aura pas besoin d'utiliser un lemme de zéros pour la conclusion finale ! Plus précisément, voilà ce qu'on va faire : on procède par l'absurde, c'est-à-dire on suppose qu'il existe un couple  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  de points de  $E^2(K)$ , vérifiant toutes les hypothèses du théorème 10.1 et tel que :  $\widehat{h}(\mathbf{x}_2) < (1 + \theta)\widehat{h}(\mathbf{x}_1)$ . On construit explicitement deux formes  $Q_1$  et  $Q_2$  de  $A(E^2)$  qui ont  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  comme point d'intersection isolé. Ensuite on fait l'extrapolation qui, du fait que nos deux points  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$  sont supposés assez proches de l'origine (au sens de la distance projective), oblige nos fonctions auxiliaires  $Q_1$  et  $Q_2$  à s'annuler aussi au point  $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$  de  $E^2(K)$ . Finalement l'annulation de  $Q_1$  et  $Q_2$  au point  $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$  entraîne facilement (sans utiliser un lemme de zéros) qu'on a  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$ , ce qui est en contradiction avec notre hypothèse et achèvera la démonstration du théorème 10.1.

Soient  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$  deux points de  $E(K)$  satisfaisant toutes les hypothèses du théorème 10.1. Comme les hauteurs normalisées de  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$  sont non nulles (puisqu'on a fait l'hypothèse  $\widehat{h}(\mathbf{x}_2) \geq \widehat{h}(\mathbf{x}_1) \geq \text{fct}(D, \varepsilon, \eta, m_w) > 0$ ) alors  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$  sont tous les deux différents des 4 points de 2-torsion de  $E$ , et donc on peut représenter respectivement  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$  dans  $\mathbb{P}_2(K)$  par des systèmes de coordonnées projectives de la forme :  $\underline{x}_1 = (x_1 : 1 : z_1)$  et  $\underline{x}_2 = (x_2 : 1 : z_2)$ . Soient aussi  $\mathbf{y}$  le point de  $E(K)$  :  $\mathbf{y} := \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$  et  $\underline{y}$  un de ses représentants dans  $\mathbb{P}_2(K)$ .

## 10.1 Construction des fonctions auxiliaires :

Les hypothèses (10.3) du théorème 10.1 entraînent d'après le lemme 14.2 du formulaire qu'il existe une famille de formes totalement explicites  $\underline{D} := (D_0, D_1, D_2)$  de  $K[X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2]$ , de bidegrés  $(2, 2)$ , représentant la différence dans  $E$  au voisinage de  $\{\mathbf{0}\} \times \{\mathbf{0}\}$  ainsi qu'au voisinage de  $\{\mathbf{x}_1\} \times \{\mathbf{x}_2\}$ . De plus, on peut vérifier (puisque c'est explicite) que cette famille  $\underline{D}$  est de hauteur logarithmique locale  $v$ -adique majorée par  $3m_v$  lorsque  $v$  est une place finie sur  $K$  et de longueur logarithmique locale  $v$ -adique majorée par  $3m_v + \log 425$  lorsque  $v$  est une place infinie sur  $K$  et que la famille constituée seulement des deux formes  $D_0$  et  $D_2$  est de hauteur logarithmique locale  $v$ -adique majorée par  $2m_v$  lorsque  $v$  est une place finie sur  $K$  et de longueur logarithmique locale  $v$ -adique majorée par  $2m_v + \log 152$

lorsque  $v$  est une place infinie sur  $K$ .

Considérons maintenant les deux formes suivantes  $P_1$  et  $P_2$  de  $K[\underline{Y}]$  (avec  $\underline{Y} := (Y_0, Y_1, Y_2)$ ) définies par :

$$\begin{aligned} P_1(\underline{Y}) &:= D_0(\underline{Y}, \underline{y}) \\ P_2(\underline{Y}) &:= D_2(\underline{Y}, \underline{y}) \end{aligned}$$

et les deux formes suivantes  $Q_1$  et  $Q_2$  de  $K[\underline{X}_1, \underline{X}_2]$  (avec  $\underline{X}_1 := (X_{10}, X_{11}, X_{12})$  et  $\underline{X}_2 := (X_{20}, X_{21}, X_{22})$ ) définies par :

$$\begin{aligned} Q_1(\underline{X}_1, \underline{X}_2) &:= P_1(\underline{D}(\underline{X}_1, \underline{X}_2)) = D_0(\underline{D}(\underline{X}_1, \underline{X}_2), \underline{y}) \\ Q_2(\underline{X}_1, \underline{X}_2) &:= P_2(\underline{D}(\underline{X}_1, \underline{X}_2)) = D_2(\underline{D}(\underline{X}_1, \underline{X}_2), \underline{y}). \end{aligned}$$

On voit clairement que nos deux formes  $P_1$  et  $P_2$  de  $K[\underline{Y}]$  sont non identiquement nulles modulo  $I(E)$  et qu'elles s'annulent, toutes les deux, au point  $\mathbf{y}$  de  $E(K)$ , par conséquent les deux formes déduites  $Q_1$  et  $Q_2$  sont non identiquement nulles modulo  $I(E^2)$  et s'annulent toutes les deux au point  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  de  $E^2(K)$ . Pour faire le lien avec le §5, ce qui va nous permettre d'appliquer les résultats qui y sont obtenus, il suffit de prendre  $m = 2$  et  $a_1 = a_2 = 1$ , c'est-à-dire  $\underline{a} = (1, 1)$ . En posant  $\psi_{\underline{a}} = \psi$ ,  $\varphi_{\underline{a}} = \varphi$ ,  $\Omega_{\underline{a}} = \Omega$  et  $i$  le plongement de Weierstrass de  $E$  dans  $\mathbb{P}_2$ , on a :

$$\begin{array}{ccccc} \varphi : & E^2 & \xrightarrow{\psi} & E^2 \times E & \xrightarrow{i^3} & \mathbb{P}_2^3 \\ & (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) & \mapsto & (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) & \mapsto & (i(\mathbf{p}_1), i(\mathbf{p}_2), i(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)). \end{array}$$

Ainsi, pour toute forme  $P$  de  $K[\underline{X}_1, \underline{X}_2, \underline{Y}]$  on a :  $\Omega(P) = \tau^2(Q)$ , où  $Q$  désigne la forme de  $K[\underline{X}_1, \underline{X}_2]$  définie en fonction de  $P$  par :

$$Q(\underline{X}_1, \underline{X}_2) := P(\underline{X}_1, \underline{X}_2, \underline{D}(\underline{X}_1, \underline{X}_2)).$$

En considérant les formes  $P_1$  et  $P_2$  de  $K[\underline{Y}]$  comme des formes de  $K[\underline{X}_1, \underline{X}_2, \underline{Y}]$  on a :

$$\Omega(P_1) = \tau^2(Q_1) \quad \text{et} \quad \Omega(P_2) = \tau^2(Q_2).$$

Par ailleurs, comme la famille  $\underline{D}$  est constituée des formes  $D_0, D_1$  et  $D_2$ , toutes de bidegré  $(2, 2)$ , on voit clairement que nos deux formes  $P_1$  et  $P_2$  de  $K[\underline{Y}]$  sont, toutes les deux, de degré 2 et que nos deux formes  $Q_1$  et  $Q_2$  de  $K[\underline{X}_1, \underline{X}_2]$  sont, toutes les deux, de bidegré  $(4, 4)$ . Les estimations des hauteurs (ou longueurs) logarithmiques locales de  $P_1, P_2, Q_1$  et  $Q_2$  sont données par le lemme suivant :

**Lemme 10.2** *Pour toute place  $v$  de  $K$  on a :*

• *lorsque  $v$  est finie :*

$$\begin{aligned} h_v(\{P_1, P_2\}) &\leq 2m_v + 2h_v(\underline{y}) \\ h_v(\{Q_1, Q_2\}) &\leq 8m_v + 2h_v(\underline{y}) \end{aligned}$$

• *et lorsque  $v$  est infinie :*

$$\begin{aligned} \ell_v(\{P_1, P_2\}) &\leq 2m_v + 2h_v(\underline{y}) + \log 152 \\ \ell_v(\{Q_1, Q_2\}) &\leq 8m_v + 2h_v(\underline{y}) + 18. \end{aligned}$$

**Démonstration.**— D'après les propriétés des hauteurs et longueurs logarithmiques locales, on a pour toute place  $v$  de  $K$  :

$$\begin{aligned} h_v(\{P_1, P_2\}) &\leq h_v(\{D_0, D_2\}) + 2h_v(\underline{y}), \\ \ell_v(\{P_1, P_2\}) &\leq \ell_v(\{D_0, D_2\}) + 2h_v(\underline{y}), \\ h_v(\{Q_1, Q_2\}) &\leq 2h_v(\underline{D}) + h_v(\{P_1, P_2\}) \\ \text{et } \ell_v(\{Q_1, Q_2\}) &\leq 2\ell_v(\underline{D}) + \ell_v(\{P_1, P_2\}). \end{aligned}$$

Le reste est un simple calcul.  $\blacksquare$

**Proposition 10.3** *Pour  $j = 1, 2$  on a :*

$$\tau^2(Q_j) = \frac{1}{X_{11}^4 X_{21}^4} \sum_{i_1 \geq 0, i_2 \geq 0} \frac{X_{11}^{i_1} X_{21}^{i_2} \partial^{(i_1, i_2)} P_j}{\Delta(\underline{X}_1)^{f(i_1)} \Delta(\underline{X}_2)^{f(i_2)}} u_1^{i_1} u_2^{i_2}$$

où les  $\partial^{(i_1, i_2)} P_j$  ( $(i_1, i_2) \in \mathbb{N}^2$ ) sont des formes de  $K[\underline{X}_1, \underline{X}_2]$  de degrés :

$$\begin{aligned} d_{\underline{X}_1}^{\circ} \partial^{(i_1, i_2)} P_j &\leq g(i_1) + 4 \\ d_{\underline{X}_2}^{\circ} \partial^{(i_1, i_2)} P_j &\leq g(i_2) + 4 \end{aligned}$$

et, pour  $T \in \mathbb{N}$  et  $v$  une place sur  $K$ , la famille des formes  $\partial^{(i_1, i_2)} P_j$ ,  $i_1 + i_2 \leq T$ , est de hauteur logarithmique locale  $h_v$  majorée par :

$$(2T + 14)m_v + 2h_v(\underline{y})$$

lorsque  $v$  est finie et elle est de longueur logarithmique locale  $\ell_v$  majorée par :

$$(2T + 14)m_v + 2h_v(\underline{y}) + 12T + 46$$

lorsque  $v$  est infinie.

**Démonstration.**— Il suffit de s'adapter à la situation du §5 comme expliqué auparavant et d'appliquer le corollaire 5.3 de cette dernière et d'utiliser les estimations des hauteurs (et longueurs) locales des formes  $P_1$  et  $P_2$  données par le lemme 10.2.  $\blacksquare$

**Proposition 10.4** *Pour  $j = 1, 2$  on a :*

$$\tau^2(Q_j)(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = \sum_{i_1 \geq 0, i_2 \geq 0} f_{i_1, i_2}^{(j)} u_1^{i_1} u_2^{i_2}$$

où  $f_{i_1, i_2}^{(j)} := \frac{(\partial^{(i_1, i_2)} P_j)(\underline{x}_1, \underline{x}_2)}{\Delta(\underline{X}_1)^{f(i_1)} \Delta(\underline{X}_2)^{f(i_2)}}$ ,  $(i_1, i_2) \in \mathbb{N}^2$ , sont des nombres de  $K$ , nuls pour  $i_1 = i_2 = 0$  et satisfaisant pour tout  $(i_1, i_2) \in \mathbb{N}^2$  et pour toute place  $v \in S$  :

$$|f_{i_1, i_2}^{(j)}|_v \leq \begin{cases} \exp\{14m_v + 2h_v(\underline{y})\} \cdot (e^{2m_v})^{i_1 + i_2} & \text{si } v \text{ est finie} \\ \exp\{14m_v + 2h_v(\underline{y}) + 46\} \cdot (e^{2m_v + 13})^{i_1 + i_2} & \text{si } v \text{ est infinie} \end{cases}$$

**Démonstration.**— Soit  $j \in \{1, 2\}$  fixé. Le fait que  $f_{i_1, i_2}^{(j)} = 0$  pour  $i_1 = i_2 = 0$  est simplement dû au fait que notre forme  $Q_j$  s'annule au point  $(\underline{x}_1, \underline{x}_2)$ . Soit maintenant  $(i_1, i_2)$  un couple fixé de  $\mathbb{N}^2$  et montrons les majorations de la proposition 10.4 pour les  $|f_{i_1, i_2}^{(j)}|_v$  ( $v \in S$ ). En désignant par  $(d_1, d_2)$  le bidegré de la forme  $\partial^{(i_1, i_2)} P_j$  de  $K[\underline{X}_1, \underline{X}_2]$ , on a clairement pour toute place  $v$  de  $K$  :

$$|\left(\partial^{(i_1, i_2)} P_j\right)(\underline{x}_1, \underline{x}_2)|_v \leq \begin{cases} H_v(\partial^{(i_1, i_2)} P_j) \cdot H_v(\underline{x}_1)^{d_1} H_v(\underline{x}_2)^{d_2} & \text{si } v \text{ est finie} \\ L_v(\partial^{(i_1, i_2)} P_j) \cdot H_v(\underline{x}_1)^{d_1} H_v(\underline{x}_2)^{d_2} & \text{si } v \text{ est infinie} \end{cases}$$

Or, lorsque  $v \in S$ , l'hypothèse principale (10.3) du théorème 10.1 entraîne, d'après la propriété *ii*) du §2 pour les distances  $\text{dist}_v$  ( $v \in M_K$ ) qu'on a :  $H_v(\underline{x}_1) = H_v(\underline{x}_2) = 1$ . D'où, pour toute place  $v \in S$  :

$$|\left(\partial^{(i_1, i_2)} P_j\right)(\underline{x}_1, \underline{x}_2)|_v \leq \begin{cases} H_v(\partial^{(i_1, i_2)} P_j) & \text{si } v \text{ est finie} \\ L_v(\partial^{(i_1, i_2)} P_j) & \text{si } v \text{ est infinie} \end{cases}$$



En appliquant par ailleurs la proposition 10.3 pour  $T = i_1 + i_2$  on a, pour toute place  $v$  de  $K$  :

- lorsque  $v$  est finie :

$$\begin{aligned} H_v\left(\partial^{(i_1, i_2)} P_j\right) &= \exp \left\{ h_v\left(\partial^{(i_1, i_2)} P_j\right) \right\} \\ &\leq \exp \left\{ 2m_v(i_1 + i_2) + 14m_v + 2h_v(\underline{y}) \right\}, \end{aligned}$$

- et lorsque  $v$  est infinie :

$$\begin{aligned} L_v\left(\partial^{(i_1, i_2)} P_j\right) &= \exp \left\{ \ell_v\left(\partial^{(i_1, i_2)} P_j\right) \right\} \\ &\leq \exp \left\{ (2m_v + 12)(i_1 + i_2) + 14m_v + 2h_v(\underline{y}) + 46 \right\}. \end{aligned}$$

D'où, pour toute place  $v \in S$  :

$$\begin{aligned} & \left| \left( \partial^{(i_1, i_2)} P_j \right) (\underline{x}_1, \underline{x}_2) \right|_v \\ & \leq \begin{cases} \exp \{ 2m_v(i_1 + i_2) + 14m_v + 2h_v(\underline{y}) \} & \text{si } v \text{ est finie} \\ \exp \{ (2m_v + 12)(i_1 + i_2) + 14m_v + 2h_v(\underline{y}) + 46 \} & \text{si } v \text{ est infinie} \end{cases} \end{aligned} \quad (10.4)$$

D'autre part, l'hypothèse (10.3) du théorème 10.1 entraîne, d'après le lemme 14.8 de l'appendice, qu'on a pour toute place  $v$  dans  $S$  :

$$\frac{1}{\left| \Delta(\underline{x}_1)^{f(i_1)} \Delta(\underline{x}_2)^{f(i_2)} \right|_v} \leq \begin{cases} 1 & \text{si } v \text{ est finie} \\ \sqrt{e}^{f(i_1)+f(i_2)} \leq e^{i_1+i_2} & \text{si } v \text{ est infinie} \end{cases} \quad (10.5)$$

Il résulte finalement de (10.4) et (10.5) qu'on a pour toute place  $v$  de  $S$  :

$$\begin{aligned} \left| f_{i_1, i_2}^{(j)} \right|_v &:= \left| \left( \partial^{(i_1, i_2)} P_j \right) (\underline{x}_1, \underline{x}_2) \right|_v \cdot \frac{1}{\left| \Delta(\underline{x}_1)^{f(i_1)} \Delta(\underline{x}_2)^{f(i_2)} \right|_v} \\ &\leq \begin{cases} \exp \{ 2m_v(i_1 + i_2) + 14m_v + 2h_v(\underline{y}) \} & \text{si } v \text{ est finie} \\ \exp \{ (2m_v + 13)(i_1 + i_2) + 14m_v + 2h_v(\underline{y}) + 46 \} & \text{si } v \text{ est infinie} \end{cases}, \end{aligned}$$

ce qui n'est rien d'autre que la majoration de la proposition 10.4 pour les  $\left| f_{i_1, i_2}^{(j)} \right|_v$  ( $v \in S$ ). La démonstration est achevée. ■

**Corollaire 10.5 (Immédiat)** *Pour toute place  $v \in S$ , les deux séries de la proposition 10.4 précédente sont absolument convergentes en valeur absolue  $v$ -adique dès que :*

$$\left| u_k \right|_v < \begin{cases} e^{-2m_v} & \text{si } v \text{ est finie} \\ e^{-2m_v-13} & \text{si } v \text{ est infinie} \end{cases} \quad k = 1, 2.$$

En particulier, pour toute place  $v \in S$ , les deux séries sus-citées convergent absolument en valeur absolue  $v$ -adique au voisinage du point  $(-x_1, -x_2)$ .

**Démonstration.**— Etant donné une place  $v \in S$ , la condition suffisante pour la convergence absolue  $v$ -adique des deux séries de la proposition 10.4 est claire et entraîne -d'après l'hypothèse principale (10.3) du théorème 10.1 et la propriété ii) du §2 pour les distances  $\text{dist}_w$  ( $w \in M_K$ )- la convergence absolue  $v$ -adique de ces même séries au voisinage du point  $(-x_1, -x_2)$ . ■

## 10.2 Extrapolation :

**Proposition 10.6** *Si l'un des deux nombres  $Q_1(\underline{0}, \underline{0})$  et  $Q_2(\underline{0}, \underline{0})$  est non nul, alors on a :*

$$h(\mathbf{y}) \geq \frac{\varepsilon}{2} \min\{h(\mathbf{x}_1), h(\mathbf{x}_2)\} - 7\eta - \frac{47}{2}.$$

**Démonstration.**— Supposons que pour un  $j \in \{1, 2\}$  on a :  $Q_j(\underline{0}, \underline{0}) \neq 0$ . Dans ce cas, comme le nombre  $Q_j(\underline{0}, \underline{0})$  appartient à  $K$  (car  $Q_j$  est une forme à coefficients dans  $K$  et  $\underline{0} \in K^3$ ) alors ce dernier doit satisfaire la formule du produit :

$$\sum_{v \in K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log |Q_j(\underline{0}, \underline{0})|_v = 0. \quad (10.6)$$

Nous majorons maintenant astucieusement le membre de gauche de (10.6) en fonction de  $\varepsilon, \eta, h(\mathbf{x}_1), h(\mathbf{x}_2)$  et  $h(\mathbf{y})$ . Pour ce faire nous distinguons les deux cas suivants :

1<sup>er</sup> cas : (si  $v \in S$ )

Dans ce cas le corollaire 10.5 nous dit que la série numérique :

$$\tau^2(Q_j)(\underline{x}_1, \underline{x}_2)(-x_1, -x_2) = \sum_{i_1 \geq 0, i_2 \geq 0} f_{i_1, i_2}^{(j)}(-x_1)^{i_1}(-x_2)^{i_2}$$

est absolument convergente en valeur absolue  $v$ -adique. Or, d'après la définition même du monomorphisme  $\tau$ , cette dernière ne peut converger que vers  $Q_j(\underline{0}, \underline{0})$ , par conséquent on doit avoir :

$$\begin{aligned} Q_j(\underline{0}, \underline{0}) &= \sum_{i_1 \geq 0, i_2 \geq 0} f_{i_1, i_2}^{(j)}(-x_1)^{i_1}(-x_2)^{i_2} \\ &= \sum_{(i_1, i_2) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}} f_{i_1, i_2}^{(j)}(-x_1)^{i_1}(-x_2)^{i_2} \quad (\text{car } f_{i_1, i_2}^{(j)} = 0 \text{ pour } (i_1, i_2) = (0,0)). \end{aligned}$$

D'où, la majoration :

$$|Q_j(\underline{0}, \underline{0})|_v \leq \begin{cases} \max_{(i_1, i_2) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}} \left\{ |f_{i_1, i_2}^{(j)}|_v \cdot |x_1|_v^{i_1} \cdot |x_2|_v^{i_2} \right\} & \text{si } v \text{ est finie} \\ \sum_{(i_1, i_2) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}} \left\{ |f_{i_1, i_2}^{(j)}|_v \cdot |x_1|_v^{i_1} \cdot |x_2|_v^{i_2} \right\} & \text{si } v \text{ est infinie} \end{cases}.$$

En utilisant les estimations de la proposition 10.4 pour les  $|f_{i_1, i_2}^{(j)}|_v$  ( $i_1, i_2 \in \mathbb{N}$ ) et en majorant les  $|x_k|_v$  ( $k = 1, 2$ ) -grâce à l'hypothèse (10.3) du théorème 10.1 et à la propriété *ii*) du §2 pour les distances  $\text{dist}_w$  ( $w \in M_K$ )- par :

$$|x_k|_v < \begin{cases} e^{-\lambda_v \varepsilon h(\mathbf{x}_k) - 2m_v} & \text{si } v \text{ est finie} \\ e^{-\lambda_v \varepsilon h(\mathbf{x}_k) - 2m_v - 16} & \text{si } v \text{ est infinie} \end{cases} \quad k = 1, 2 ;$$

la dernière majoration de  $|Q_j(\underline{0}, \underline{0})|_v$  entraîne :

$$|Q_j(\underline{0}, \underline{0})|_v \leq \exp\{14m_v + 2h_v(\underline{y})\} \max_{(i_1, i_2) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}} e^{-\lambda_v \varepsilon \{i_1 h(\mathbf{x}_1) + i_2 h(\mathbf{x}_2)\}}$$

si  $v$  est finie et :

$$|Q_j(\underline{0}, \underline{0})|_v \leq \exp\{14m_v + 2h_v(\underline{y}) + 46\} \sum_{(i_1, i_2) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}} e^{-\lambda_v \varepsilon \{i_1 h(\mathbf{x}_1) + i_2 h(\mathbf{x}_2)\}} (e^{-3})^{i_1 + i_2}$$

si  $v$  est infinie.

Comme maintenant pour tout  $(i_1, i_2) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}$  on a :  $i_1 h(\mathbf{x}_1) + i_2 h(\mathbf{x}_2) \geq (i_1 + i_2) \min\{h(\mathbf{x}_1), h(\mathbf{x}_2)\} \geq \min\{h(\mathbf{x}_1), h(\mathbf{x}_2)\}$  et que :

$$\sum_{(i_1, i_2) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}} (e^{-3})^{i_1 + i_2} = \frac{1}{(1 - e^{-3})^2} - 1 < e,$$

alors :

$$|Q_j(\underline{0}, \underline{0})|_v \leq \begin{cases} \exp\{14m_v + 2h_v(\underline{y})\}e^{-\lambda_v \varepsilon \min\{h(\mathbf{x}_1), h(\mathbf{x}_2)\}} & \text{si } v \text{ est finie} \\ \exp\{14m_v + 2h_v(\underline{y}) + 47\}e^{-\lambda_v \varepsilon \min\{h(\mathbf{x}_1), h(\mathbf{x}_2)\}} & \text{si } v \text{ est infinie} \end{cases}.$$

En prenant finalement les logarithmes des deux membres de cette dernière inégalité, on obtient :

$$(e) : \log |Q_j(\underline{0}, \underline{0})|_v \leq \begin{cases} -\lambda_v \varepsilon \min\{h(\mathbf{x}_1), h(\mathbf{x}_2)\} + 14m_v + 2h_v(\underline{y}) & \text{si } v \nmid \infty \\ -\lambda_v \varepsilon \min\{h(\mathbf{x}_1), h(\mathbf{x}_2)\} + 14m_v + 2h_v(\underline{y}) + 47 & \text{si } v \mid \infty \end{cases}.$$

2ième cas : (si  $v \notin S$ )

Dans ce deuxième cas, on majore naïvement le nombre  $\log |Q_j(\underline{0}, \underline{0})|_v$ . On remarque que  $Q_j(\underline{0}, \underline{0})$  est un coefficient de la forme  $Q_j$ , donc on doit avoir :

$$\begin{aligned} \log |Q_j(\underline{0}, \underline{0})|_v &\leq h_v(Q_j) \\ &\leq \begin{cases} 8m_v + 2h_v(\underline{y}) & \text{si } v \text{ est finie} \\ 8m_v + 2h_v(\underline{y}) + 18 & \text{si } v \text{ est infinie} \end{cases} \end{aligned}$$

d'après le lemme 10.2. D'où à fortiori :

$$(f) : \log |Q_j(\underline{0}, \underline{0})|_v \leq \begin{cases} 14m_v + 2h_v(\underline{y}) & \text{si } v \text{ est finie} \\ 14m_v + 2h_v(\underline{y}) + 47 & \text{si } v \text{ est infinie} \end{cases}.$$

En majorant maintenant, pour toute place  $v$  de  $K$ , le nombre  $\log |Q_j(\underline{0}, \underline{0})|_v$  en utilisant (e) si  $v \in S$  et (f) si  $v \notin S$  et en tenant compte des identités :

$$\begin{aligned} \sum_{v \in S} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \lambda_v &= 1 \quad (\text{par hypothèse}), \quad \sum_{v \in M_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} m_v = \eta, \\ \sum_{v \in M_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} h_v(\underline{y}) &= h(\mathbf{y}) \quad \text{et} \quad \sum_{v \in M_K^\infty} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} = 1; \end{aligned}$$

on a la majoration :

$$\sum_{v \in M_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log |Q_j(\underline{0}, \underline{0})|_v \leq -\varepsilon \min\{h(\mathbf{x}_1), h(\mathbf{x}_2)\} + 14\eta + 2h(\mathbf{y}) + 47.$$

Or, d'après (10.6) le nombre  $\sum_{v \in M_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log |Q_j(\underline{0}, \underline{0})|_v$  est nul. La dernière inégalité est donc équivalente à :

$$-\varepsilon \min\{h(\mathbf{x}_1), h(\mathbf{x}_2)\} + 14\eta + 2h(\mathbf{y}) + 47 \geq 0;$$

ce qui donne finalement :

$$h(\mathbf{y}) \geq \frac{\varepsilon}{2} \min\{h(\mathbf{x}_1), h(\mathbf{x}_2)\} - 7\eta - \frac{47}{2}.$$

La démonstration est achevée. ■

### 10.3 Démonstration du théorème 10.1 :

Nous procédons par l'absurde. Supposons qu'il existe un couple  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  de points de  $E(K)$ , satisfaisant toutes les hypothèses du théorème 10.1 mais ne satisfaisant

pas sa conclusion, c'est-à-dire qu'on a :  $\widehat{h}(\mathbf{x}_1) \leq \widehat{h}(\mathbf{x}_2) < (1 + \theta)\widehat{h}(\mathbf{x}_1)$ . On a donc, en fonction de la norme de Néron-Tate :

$$|\mathbf{x}_1| \leq |\mathbf{x}_2| < (1 + \theta)^{\frac{1}{2}} |\mathbf{x}_1| < \left(1 + \frac{\theta}{2}\right) |\mathbf{x}_1|,$$

d'où :

$$|\mathbf{x}_1| \leq |\mathbf{x}_2| < \left(1 + \frac{\theta}{2}\right) |\mathbf{x}_1|. \quad (10.7)$$

Grâce à (10.7) et à l'hypothèse (10.1) du théorème 10.1, on a la série d'inégalités suivante :

$$\begin{aligned} |\mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^2 &= |\mathbf{x}_2|^2 + |\mathbf{x}_1|^2 - 2 \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle \\ &= (|\mathbf{x}_2| - |\mathbf{x}_1|)^2 + 2(|\mathbf{x}_1| \cdot |\mathbf{x}_2| - \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle) \\ &= (|\mathbf{x}_2| - |\mathbf{x}_1|)^2 + 2(1 - \cos(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)) |\mathbf{x}_1| \cdot |\mathbf{x}_2| \\ &< \left(\frac{\theta}{2} |\mathbf{x}_1|\right)^2 + 2\left(\frac{\beta}{4}\right) |\mathbf{x}_1| \cdot \left(1 + \frac{\theta}{2}\right) |\mathbf{x}_1|, \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\widehat{h}(\mathbf{y}) < \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\theta^2}{4} + \frac{\beta\theta}{4}\right) \widehat{h}(\mathbf{x}_1).$$

Or  $\frac{\beta}{2} + \frac{\theta^2}{4} + \frac{\beta\theta}{4} = \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{36} + \frac{1}{24}\varepsilon\sqrt{\varepsilon} \leq \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{36} + \frac{1}{24}\right)\varepsilon \leq \frac{\varepsilon}{3}$ , d'où :

$$\widehat{h}(\mathbf{y}) < \frac{\varepsilon}{3} \widehat{h}(\mathbf{x}_1). \quad (10.8)$$

Maintenant il vient :

$$\begin{aligned} h(\mathbf{y}) &\leq \widehat{h}(\mathbf{y}) + \frac{3}{2}\eta + 8 \\ &< \frac{\varepsilon}{3} \widehat{h}(\mathbf{x}_1) + \frac{3}{2}\eta + 8 \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \left( \widehat{h}(\mathbf{x}_1) - \frac{3}{4}\eta - 5 \right) - 7\eta - \frac{47}{2} \end{aligned} \quad (10.9)$$

où, dans cette série d'inégalités, la première inégalité suit du théorème 13.14 du formulaire, la deuxième de (10.8) et la troisième de l'hypothèse (10.2) du théorème 10.1. Finalement, comme on a d'après le théorème 13.14 du formulaire :  $\widehat{h}(\mathbf{x}_1) - \frac{3}{4}\eta - 5 = \min\{\widehat{h}(\mathbf{x}_1), \widehat{h}(\mathbf{x}_2)\} - \frac{3}{4}\eta - 5 \leq \min\{h(\mathbf{x}_1), h(\mathbf{x}_2)\}$ , on déduit de (10.9) :

$$h(\mathbf{y}) < \frac{\varepsilon}{2} \min\{h(\mathbf{x}_1), h(\mathbf{x}_2)\} - 7\eta - \frac{47}{2}.$$

Cette dernière inégalité entraîne, d'après la proposition 10.6, que nos deux formes  $Q_1$  et  $Q_2$  de  $K[\underline{X}_1, \underline{X}_2]$  s'annulent, toutes les deux, en  $(\underline{0}, \underline{0})$ , ce qui implique que nos deux formes  $P_1$  et  $P_2$  de  $K[\underline{Y}]$  s'annulent, toutes les deux, en  $\underline{0}$ . Ce dernier fait montre qu'on a :  $-\mathbf{y} = \mathbf{0}$ . En effet, le point  $-\mathbf{y} = \mathbf{0} - \mathbf{y}$  de  $E$  peut être représenté dans  $\mathbb{P}_2$  par le système de coordonnées projectives  $(D_0(\underline{0}, \underline{y}) : D_1(\underline{0}, \underline{y}), D_2(\underline{0}, \underline{y})) = (P_1(\underline{0}) : D_1(\underline{0}, \underline{y}) : P_2(\underline{0}))$ , or lorsque  $P_1(\underline{0}) = P_2(\underline{0}) = 0$ , cette représentation est identique à  $(0 : 1 : 0) = \underline{0}$ , par conséquent le point  $-\mathbf{y}$  sera identique à l'origine  $\mathbf{0}$  de  $E$ . Enfin  $-\mathbf{y} = \mathbf{0}$  entraîne  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ , puis  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$ , ce qui donne la contradiction cherchée avec les hypothèses et achève cette démonstration.

## 11 Démonstration des théorèmes 2.1, 2.2 et 2.3

Notons dans toute la suite,  $R$  l'expression dépendant de  $\varepsilon, m$  et  $\eta$  suivante :

$$R := (2904m)^m \left[ \left\{ 55\varepsilon^{-\frac{m}{m-1}} + m\varepsilon^{-1} \right\} \eta + \left\{ 272\varepsilon^{-\frac{m}{m-1}} + 2m\varepsilon^{-1} \right\} \right],$$

et désignons respectivement par (I) et (II) les deux systèmes d'inégalités simultanées (en  $\mathbf{x} \in E(K)$ ) :

$$\text{dist}_v(\mathbf{x}, \mathbf{0}) < e^{-\lambda_v \varepsilon h(\mathbf{x}) - 2m_v - c_v} \quad (v \in S) \quad (I)$$

$$\text{dist}_v(\mathbf{x}, \mathbf{0}) < e^{-\lambda_v \varepsilon h(\mathbf{x}) - \lambda_v R - 2m_v - c_v} \quad (v \in S). \quad (II)$$

Afin de démontrer nos théorèmes principaux sur le décompte des points de  $E(K)$  satisfaisant le système d'inégalités (I), nous allons estimer le nombre de tels points qui sont de hauteurs  $> R$ , lesquels sont appelés ci-dessous “points de hauteurs assez grandes”, puis le nombre de ces points qui sont de hauteurs  $\leq R$ , lesquels sont nommés ci-dessous “points de hauteurs assez petites”.

Notons que l'estimation du nombre de points de  $E(K)$ , satisfaisant le système d'inégalités (I) et qui sont de hauteurs assez grandes s'obtient à partir des théorèmes 9.3 et 10.1, alors que pour estimer le nombre de points de  $E(K)$  qui sont de hauteurs assez petites, nous disposons de deux méthodes différentes qui sont :

### La première

consiste à remplacer le système d'inégalités (I) par le système d'inégalités (II) de sorte que seul le point  $\mathbf{0}$  puisse satisfaire (II) tout en étant de hauteur  $\leq R$ .

### La deuxième

consiste à estimer le nombre de tous les points de  $E(K)$  de hauteurs  $\leq R$  sans tenir compte du système d'inégalités (I). Cette deuxième méthode est moins élémentaire que la première dans le sens où elle nécessite l'utilisation d'un résultat fournissant une borne inférieure (strictement positive) pour l'ensemble des hauteurs de Néron-Tate des points non de torsion de  $E(K)$  et d'un résultat fournissant une majoration pour le nombre de points de torsion de  $E(K)$ . De tels résultats se trouvent respectivement dans [H-S1] et [Me].

### 11.1 Décompte des points de hauteurs assez grandes :

Le décompte des points de  $E(K)$  satisfaisant le système d'inégalités (I) et qui sont de hauteurs  $> R$  est donné par le théorème suivant :

**Théorème 11.1** *Soit  $E$  une courbe elliptique définie sur un corps de nombres  $K$  de degré  $D$ , plongée dans  $\mathbb{P}_2$  à la Weierstrass, d'équation projective  $Y^2Z = 4X^3 - g_2XZ^2 - g_3Z^3$  ( $g_2, g_3 \in K$ ) et d'élément neutre (en tant que groupe) le point à l'infini  $\mathbf{0}$  représenté dans  $\mathbb{P}_2$  par les coordonnées projectives  $(0 : 1 : 0)$ . On munit  $E$  de la hauteur de Néron-Tate définie au §13, notée  $\hat{h}$ . Soient aussi  $S$  un ensemble fini de places sur  $K$ ,  $m_v$  ( $v \in M_K$ ),  $\eta$  les réels positifs définis au §2 et  $(\lambda_v)_{v \in S}$  une famille de réels positifs satisfaisant :*

$$\sum_{v \in S} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \lambda_v = 1.$$

Soient enfin  $\varepsilon$  un réel strictement positif et  $m$  un entier  $\geq 2$ . On a :

$$\begin{aligned} \# \left\{ \mathbf{x} \in E(K), \mathbf{x} \text{ satisfait (I) et } \hat{h}(\mathbf{x}) > R \right\} \\ \leq 4\varepsilon^{-\frac{1}{2}} [m(m-1)(\log m + 8.8) + m|\log \varepsilon|] \cdot \left( 499\varepsilon^{-\frac{m}{2(m-1)}} \right)^r, \end{aligned}$$

où  $r$  désigne le rang du groupe de Mordell-Weil de  $E(K)$ .

**Démonstration.**— Remarquons d'abord que la conclusion du théorème 10.1 reste toujours valable lorsqu'on remplace les hypothèses de ce dernier par celles du théorème 9.3 pour  $m = 2$ . Notons toujours par  $\alpha$  le paramètre choisi au sous-paragraphe 10.2, par  $\theta$  le paramètre du théorème 10.1 et désignons par  $r$  le rang du groupe de Mordell-Weil de  $E(K)$ . Notre procédé consiste à recouvrir l'espace euclidien  $E(K) \otimes \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^r$  par un nombre fini de cônes de centres  $\mathbf{0}$  et d'angles  $\leq \arccos(1 - \alpha/4)$ , ensuite en utilisant les deux théorèmes 9.3 et 10.1 nous aurons un décompte des points de  $E(K)$  satisfaisant le système d'inégalités (I) et qui sont de hauteurs de Néron-Tate  $> R$ , dans chacun de ces petits cônes. Finalement, en multipliant le décompte obtenu dans un tel petit cône par le nombre de cônes que comporte notre recouvrement, on aura l'estimation du théorème 11.1. D'après le lemme 14.1 de l'appendice, le nombre minimal de cônes d'angles  $\leq \arccos(1 - \alpha/4)$  suffisant pour recouvrir l'espace euclidien  $E(K) \otimes \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^r$  est majoré par  $\left(1 + \frac{8}{\sqrt{2\alpha}}\right)^r < \left(499\varepsilon^{-\frac{m}{2(m-1)}}\right)^r$  (en vertu du choix du paramètre  $\alpha$  effectué au sous-paragraphe 9.2). Dans un tel recouvrement, supposons qu'on a  $\ell$  points de  $E(K)$  ( $\ell \geq 1$ ) satisfaisant le système d'inégalités (I), appartenant à un même cône et qui sont de hauteurs de Néron-Tate  $> R$ . Notons par  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_\ell$  ces  $\ell$  points, ordonnés selon l'ordre croissant de leurs hauteurs de Néron-Tate :

$$R < \hat{h}(\mathbf{x}_1) \leq \hat{h}(\mathbf{x}_2) \leq \dots \leq \hat{h}(\mathbf{x}_\ell).$$

En effectuant la division euclidienne de l'entier positif  $\ell - 1$  sur l'entier positif non nul  $m - 1$  :

$$\ell - 1 = k(m - 1) + r, \quad 0 \leq r \leq m - 2;$$

considérons parmi les  $\ell$  points précédents, seulement les points :  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{k(m-1)+1}$  et soient parmi ces derniers  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_m$  les  $m$  points :

$$\mathbf{y}_i := \mathbf{x}_{k(i-1)+1} \quad i = 1, \dots, m.$$

On a évidemment aussi :

$$R < \hat{h}(\mathbf{y}_1) \leq \hat{h}(\mathbf{y}_2) \leq \dots \leq \hat{h}(\mathbf{y}_m).$$

Maintenant, d'une part le  $m$ -uplet  $(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_m)$  de  $E^m(K)$  ainsi considéré satisfait clairement toutes les hypothèses du théorème 9.3, donc -d'après ce dernier- il doit exister un entier positif  $j \in \{2, \dots, m\}$  tel que l'on ait :

$$\hat{h}(\mathbf{y}_j) < \sqrt{2}(m-1)(2904m)^m \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{m}{m-1}} \hat{h}(\mathbf{y}_{j-1}) \quad (11.1)$$

et d'autre part -d'après la remarque faite au début de cette démonstration- les hypothèses du théorème 10.1 sont clairement satisfaites pour tout couple  $(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1})$ ,  $n = 1, \dots, \ell - 1$ , donc d'après le théorème 10.1 on a pour tout  $n \in \{1, \dots, \ell - 1\}$  :  $\hat{h}(\mathbf{x}_{n+1}) \geq (1 + \theta)\hat{h}(\mathbf{x}_n)$  et plus généralement pour tout  $n_1, n_2$  ( $n_1 \leq n_2$ ) dans  $\{1, \dots, \ell - 1\}$  :  $\hat{h}(\mathbf{x}_{n_2}) \geq (1 + \theta)^{n_2 - n_1} \hat{h}(\mathbf{x}_{n_1})$ . En particulier pour un entier  $j \in \{2, \dots, m\}$  satisfaisant (11.1) on a :

$$\hat{h}(\mathbf{y}_j) = \hat{h}(\mathbf{x}_{k(j-1)+1}) \geq (1 + \theta)^k \hat{h}(\mathbf{x}_{k(j-2)+1}) = (1 + \theta)^k \hat{h}(\mathbf{y}_{j-1}),$$

c'est-à-dire :

$$\hat{h}(\mathbf{y}_j) \geq (1 + \theta)^k \hat{h}(\mathbf{y}_{j-1}). \quad (11.2)$$

Comme les points  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m$  sont de hauteurs de Néron-Tate supérieures à  $R$  (donc non nulles), les deux relations (11.1) et (11.2) entraînent :

$$(1 + \theta)^k < \sqrt{2}(m-1)(2904m)^m \varepsilon^{-\frac{m}{m-1}},$$

ce qui donne :

$$k < \frac{\log [\sqrt{2}(m-1)(2904m)^m \varepsilon^{-\frac{m}{m-1}}]}{\log(1+\theta)}.$$

Puis, comme  $\ell - 1 = k(m-1) + r$  et  $r \leq m-2$ , on a :  $\ell - 1 \leq k(m-1) + m-2$ , c'est-à-dire  $\ell \leq (m-1)(k+1)$ , d'où, d'après la majoration précédente pour  $k$  :

$$\ell \leq (m-1) \left( \frac{\log [\sqrt{2}(m-1)(2904m)^m \varepsilon^{-\frac{m}{m-1}}]}{\log(1+\theta)} + 1 \right).$$

En majorant maintenant  $\sqrt{2}(m-1)$  par  $2^m$  et en minorant  $\log(1+\theta)$  par  $\frac{1}{4}\sqrt{\varepsilon}$  (qui vient simplement du fait que la fonction réelle  $x \mapsto \frac{\log(1+x)}{x}$  est décroissante sur  $]0, +\infty[$  et que  $\theta := \frac{1}{3}\sqrt{\varepsilon} \leq \frac{1}{3}$ ) on a :

$$\begin{aligned} \frac{\log [\sqrt{2}(m-1)(2904m)^m \varepsilon^{-\frac{m}{m-1}}]}{\log(1+\theta)} + 1 &\leq 4\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \log [(5808m)^m \varepsilon^{-\frac{m}{m-1}}] + 1 \\ &\leq 4\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \left\{ m(\log m + \log 5808) + \frac{m}{m-1} |\log \varepsilon| \right\} + 1 \\ &\leq 4\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \left[ m(\log m + 8.8) + \frac{m}{m-1} |\log \varepsilon| \right]. \end{aligned}$$

D'où la majoration finale de  $\ell$  :

$$\ell \leq 4\varepsilon^{-\frac{1}{2}} [m(m-1)(\log m + 8.8) + m|\log \varepsilon|].$$

On vient ainsi de montrer que le nombre de points de  $E(K)$  satisfaisant le système d'inégalité (I), qui sont de hauteur de Néron-Tate  $> R$  et contenus dans un même cône de notre recouvrement, ne peut dépasser la quantité  $4\varepsilon^{-\frac{1}{2}} [m(m-1)(\log m + 8.8) + m|\log \varepsilon|]$ .

Il ne reste qu'à multiplier cette dernière quantité par l'estimation  $(499\varepsilon^{-\frac{m}{2(m-1)}})^r$  du nombre de cônes constituant notre recouvrement de l'espace euclidien  $E(K) \otimes \mathbb{R}$  pour aboutir finalement à l'estimation du théorème 11.1 pour le nombre de points de  $E(K)$  satisfaisant le système d'inégalité (I) et qui sont de hauteurs de Néron-Tate  $> R$ . La démonstration est achevée. ■

**Corollaire 11.2 (Immédiat)** *Sous les hypothèses du théorème 11.1 précédent, on a :*

$$\begin{aligned} &\# \left\{ \mathbf{x} \in E(K), \mathbf{x} \text{ satisfait (II) et } \widehat{h}(\mathbf{x}) > R \right\} \\ &\leq 4\varepsilon^{-\frac{1}{2}} [m(m-1)(\log m + 8.8) + m|\log \varepsilon|] \cdot \left( 499\varepsilon^{-\frac{m}{2(m-1)}} \right)^r, \end{aligned}$$

où  $r$  désigne le rang du groupe de Mordell-Weil de  $E(K)$ .

**Démonstration.**— Il suffit de remarquer que le système d'inégalités (II) entraîne trivialement le système d'inégalité (I). ■

## 11.2 Décompte des points de hauteurs assez petites :

### 11.2.1 Première méthode :

Comme déjà dit, elle consiste à montrer que l'ensemble des points de  $E(K)$  satisfaisant l'inégalité (II) et qui sont de hauteurs de Néron-Tate  $\leq R$ , est réduit au singleton  $\{\mathbf{0}\}$ . C'est le théorème suivant :

**Théorème 11.3** *Sous les hypothèses du théorème 11.1, on a :*

$$\# \left\{ \mathbf{x} \in E(K), \mathbf{x} \text{ satisfait (II) et } \widehat{h}(\mathbf{x}) \leq R \right\} = \{\mathbf{0}\}.$$

**Démonstration.**— Nous procédons par l'absurde, c'est-à-dire que nous supposons qu'il existe un point  $\mathbf{x}$  de  $E(K)$  différent de l'origine  $\mathbf{0}$  de  $E$ , de hauteur de Néron-Tate  $\widehat{h}(\mathbf{x}) \leq R$  et satisfaisant le système d'inégalités (II), c'est-à-dire satisfaisant :

$$\text{dist}_v(\mathbf{x}, \mathbf{0}) < e^{-\lambda_v \varepsilon h(\mathbf{x}) - \lambda_v R - 2m_v - c_v} < 1 \quad \text{pour } v \in S.$$

Ces inégalités entraînent -d'après la propriété ii) du §2 pour les distances  $\text{dist}_w$  ( $w \in M_K$ )- que  $\mathbf{x} \in E(K) \setminus \{Y = 0\}$  et en désignant par  $\underline{x} = (x, 1, z) \in K^3$  son représentant d'ordonnée  $Y = 1$  dans  $\mathbb{P}_2$ , on a :

$$\text{dist}_v(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \max(|x|_v, |z|_v) \quad \forall v \in S.$$

Ceci nous permet de déduire du système d'inégalité (II), le système d'inégalités :

$$\max(|x|_v, |z|_v) < e^{-\lambda_v \varepsilon h(\mathbf{x}) - \lambda_v R - 2m_v - c_v} \quad \text{pour } v \in S.$$

En reportant toutes ces inégalités dans la somme :

$$\sum_{v \in S} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \max(|x|_v, |z|_v)$$

et en utilisant l'hypothèse  $\sum_{v \in S} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \lambda_v = 1$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{v \in S} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \max(|x|_v, |z|_v) &< -\varepsilon h(\mathbf{x}) - R - \sum_{v \in S} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} (2m_v + c_v) \\ &\leq -\varepsilon h(\mathbf{x}) - R. \end{aligned} \tag{11.3}$$

Par ailleurs, on a par définition :

$$\sum_{v \in M_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \max(|x|_v, |z|_v) \geq 0,$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \sum_{v \in S} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \max(|x|_v, |z|_v) &\geq - \sum_{v \notin S} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \max(|x|_v, |z|_v) \\ &\geq - \sum_{v \notin S} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \max(|x|_v, 1, |z|_v) \\ &\geq - \sum_{v \in M_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \max(|x|_v, 1, |z|_v) = -h(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

D'où :

$$\sum_{v \in S} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \max(|x|_v, |z|_v) \geq -h(\mathbf{x}). \tag{11.4}$$

En comparant (11.3) et (11.4) on obtient :

$$-\varepsilon h(\mathbf{x}) - R > -h(\mathbf{x}),$$

c'est-à-dire :  $h(\mathbf{x}) > \frac{R}{1 - \varepsilon} > (1 + \varepsilon)R = R + \varepsilon R$ .

On conclut, grâce au théorème 13.14 du formulaire :

$$\begin{aligned} \widehat{h}(\mathbf{x}) &\geq h(\mathbf{x}) - \frac{3}{2}\eta - 8 \\ &> R + \varepsilon R - \frac{3}{2}\eta - 8 \\ &> R \quad \left( \text{car } R > \frac{1}{\varepsilon}(3/2.\eta + 8) \right). \end{aligned}$$



Ce qui donne la contradiction cherchée et achève cette démonstration.  $\blacksquare$

### 11.2.2 Deuxième méthode :

Comme déjà dit, elle consiste simplement à estimer le nombre de points de  $E(K)$  qui sont de hauteurs de Néron-Tate  $\leq R$ , sans tenir compte du système d'inégalités (I). On dispose plus généralement d'un lemme estimant le nombre de points (à coordonnées dans un corps de nombre donné  $K$ ) d'une variété abélienne  $A$  (définie sur  $K$ ) qui sont de hauteurs de Néron-Tate majorées par une constante positive donnée  $R$ . Notons que cette estimation dépend de deux quantités liées à  $A$  : la première est la plus petite valeur non nulle des hauteurs des points de  $A(K)$ , qu'on désigne par  $\widehat{h}_{\min}$  et la deuxième est le nombre de points de torsion de  $A(K)$ , qu'on désigne par  $\#A(K)_{\text{tor}}$ . Dans notre cas ( $A = E$  est une courbe elliptique), afin d'avoir un résultat complètement explicite, on se réfère à [Me] pour majorer  $\#A(K)_{\text{tor}}$  et à [H-S1] pour minorer  $\widehat{h}_{\min}$ , en fonction des invariants habituels de la courbe elliptique  $E$ . Notre lemme est le suivant :

**Lemme 11.4** *Soit  $A$  une variété abélienne définie sur un corps de nombres  $K$  et munie d'une hauteur de Néron-Tate  $\widehat{h}$  et soit  $r$  le rang du groupe de Mordell-Weil  $A(K)$  qu'on suppose non nul. Alors, pour tout réel positif  $R$  on a :*

$$\#\left\{\mathbf{x} \in A(K) \mid \widehat{h}(\mathbf{x}) \leq R\right\} \leq \#A(K)_{\text{tor}} \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{4R}{\widehat{h}_{\min}}}\right)^r,$$

où  $A(K)_{\text{tor}}$  désigne le groupe fini des points de torsion de  $A(K)$  et  $\widehat{h}_{\min}$  désigne la plus petite valeur des hauteurs des points de non torsion de  $A(K)$ .

**Démonstration.**— Soient  $\Gamma$  le groupe de Mordell-Weil de  $A(K)$  et  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_r$  des générateurs de  $\Gamma$ . Le groupe de Mordell-Weil  $A(K)$  s'écrit alors :

$$A(K) = A(K)_{\text{tor}} \oplus \mathbf{p}_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbf{p}_r\mathbb{Z}.$$

Posons, pour un réel positif donné  $R$  :

$$\Gamma_R := \left\{\mathbf{x} \in \mathbf{p}_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbf{p}_r\mathbb{Z} \mid \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \text{ et } \widehat{h}(\mathbf{x}) \leq R\right\}.$$

Il est clair qu'on a :

$$\#\left\{\mathbf{x} \in A(K) \mid \widehat{h}(\mathbf{x}) \leq R\right\} = \#A(K)_{\text{tor}} \cdot \#\Gamma_R.$$

Pour aboutir à la conclusion du lemme 11.4, on doit alors montrer qu'on a :

$$\#\Gamma_R \leq \left(1 + \sqrt{\frac{4R}{\widehat{h}_{\min}}}\right)^r.$$

Nous introduisons pour cela l'entier  $N \geq 1$  défini par :

$$N := \left\lceil 1 + \sqrt{\frac{4R}{\widehat{h}_{\min}}} \right\rceil \quad (\text{où } [\cdot] \text{ désigne la partie entière})$$

et nous considérons l'application  $\text{cl}|_{\Gamma_R}$  de  $\Gamma_R$  dans  $\Gamma/N\Gamma$ , restriction de l'homomorphisme surjectif  $\text{cl}$  de  $\Gamma$  dans  $\Gamma/N\Gamma$  associant à chaque point du groupe  $\Gamma$  sa classe modulo le groupe  $N\Gamma$  :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_R \subset \Gamma & \xrightarrow{\text{cl}|_{\Gamma_R}} & \Gamma/N\Gamma \\ \mathbf{x} & \longmapsto & \text{cl}(\mathbf{x}) \bmod N\Gamma \end{array}.$$

Le choix de l'entier  $N$  pousse l'application  $\text{cl}|_{\Gamma_R}$  à être injective. En effet, si ceci n'était pas le cas, il devrait exister au moins un couple  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  de  $\Gamma_R^2$  tel que l'on ait  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$  et  $\text{cl}(\mathbf{x}) = \text{cl}(\mathbf{y})$ . Pour un tel couple, le point  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$  vérifie :  $\text{cl}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \text{cl}(\mathbf{0})$  et  $\mathbf{x} - \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ , ce qui revient à dire que  $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in (N\Gamma)^*$  ou en d'autres termes que le point  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$  s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = N\mathbf{z} \quad \text{avec } \mathbf{z} \in \Gamma \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

Comme  $\mathbf{z} \in \Gamma \setminus \{\mathbf{0}\}$ ,  $\mathbf{z}$  est un point non de torsion, donc sa hauteur de Néron-Tate est minorée par  $\widehat{h}_{\min}$ . Ce qui permet de minorer la hauteur de Néron-Tate du point  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$  par :

$$\widehat{h}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \widehat{h}(N\mathbf{z}) = N^2 \widehat{h}(\mathbf{z}) \geq N^2 \widehat{h}_{\min}.$$

Par ailleurs, la hauteur de Néron-Tate du point  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$  est majorée par :

$$\widehat{h}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 \leq (|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|)^2 \leq (\sqrt{R} + \sqrt{R})^2 \quad (\text{car } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Gamma_R),$$

c'est-à-dire :  $\widehat{h}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \leq 4R$ .

Il résulte de la majoration et de la minoration de  $\widehat{h}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  qu'on a :

$$N^2 \widehat{h}_{\min} \leq 4R.$$

Ce qui conduit à la contradiction  $N \leq \sqrt{\frac{4R}{\widehat{h}_{\min}}}$  et prouve que l'application  $\text{cl}|_{\Gamma_R}$  est bien une injection. Finalement l'injectivité de  $\text{cl}|_{\Gamma_R}$  entraîne :

$$\#\Gamma_R \leq \#(\Gamma/N\Gamma) = N^r \leq \left(1 + \sqrt{\frac{4R}{\widehat{h}_{\min}}}\right)^r,$$

c'est-à-dire :  $\#\Gamma_R \leq \left(1 + \sqrt{\frac{4R}{\widehat{h}_{\min}}}\right)^r$ .

La démonstration du lemme 11.4 est achevée. ■

### 11.3 Démonstration des deux premiers théorèmes principaux :

Nous déduisons d'abord immédiatement du corollaire 11.2 et du théorème 11.3 le théorème suivant :

**Théorème 11.5** *Sous les hypothèses du théorème 11.1, on a :*

$$\#\{\mathbf{x} \in E(K) / \mathbf{x} \text{ satisfait (II)}\} \leq 4\varepsilon^{-\frac{1}{2}} [m(m-1)(\log m + 9) + m|\log \varepsilon|] \left(499\varepsilon^{-\frac{m}{2(m-1)}}\right)^r.$$

De ce théorème 11.5 nous apparait deux façons de procéder pour optimiser notre résultat. La première consiste à choisir l'entier  $m \geq 2$  (en fonction de  $\varepsilon$  et  $r$ ) de façon à rendre la quantité  $R = R(m)$  minimale afin d'affaiblir le mieux possible le système d'inégalité (II). La deuxième par contre consiste à choisir  $m$  pour rendre plutôt la quantité du théorème 11.5 estimant le nombre de points de  $E(K)$  satisfaisant (II), minimale. Le corollaire 14.10 de l'appendice montre que pour  $\varepsilon$  suffisamment petit (plus précisément  $\varepsilon \leq \frac{1}{15788}$ ), l'entier :

$$m_0 := \left\lceil \sqrt{\frac{2|\log \varepsilon|}{\log |\log \varepsilon| - \log \log |\log \varepsilon| + 16}} + 2 \right\rceil$$

(avec  $[\cdot]$  désigne la partie entière), minimise presque  $R$  et on a :

$$R(m_0) \leq 56(\eta + 5)\varepsilon^{-1 - \frac{183}{\log|\log \varepsilon|}}.$$

D'autre part, un simple calcul montre que la quantité :

$$4\varepsilon^{-\frac{1}{2}} [m_0(m_0 - 1)(\log m_0 + 9) + m_0 |\log \varepsilon|] \left( 499\varepsilon^{-\frac{m_0}{2(m_0-1)}} \right)^r$$

est majorée par :

$$34\varepsilon^{-1/2} |\log \varepsilon|^{3/2} (\log |\log \varepsilon|)^{-1/2} \times \left[ 499\varepsilon^{-1/2} \exp\left(\sqrt{|\log \varepsilon| \log |\log \varepsilon|}\right) \right]^r.$$

Le premier théorème principal résulte ainsi simplement du théorème 11.5 pour  $m = m_0$ .

Par ailleurs, le corollaire 14.12 de l'appendice montre que l'entier :

$$m_1 := \left\lceil \frac{r}{4} |\log \varepsilon| + 2 \right\rceil$$

(avec  $[\cdot]$  désigne la partie entière) minimise presque la quantité :

$$4\varepsilon^{-\frac{1}{2}} [m(m - 1)(\log m + 9) + m |\log \varepsilon|] \left( 499\varepsilon^{-\frac{m}{2(m-1)}} \right)^r$$

et lui donne une valeur

$$\leq 2r^2 \varepsilon^{-\frac{1}{2}} (|\log \varepsilon|)^2 (\log r + \log |\log \varepsilon| + 82) \left( 499\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \right)^r.$$

D'autre part, un simple calcul montre que la valeur de  $R$  lorsque  $m$  vaut  $m_1$  est majorée par :

$$R(m_1) \leq \exp \left\{ \left( \frac{r}{4} |\log \varepsilon| + 2 \right) (\log |\log \varepsilon| + \log r + 16) + \log(\eta + 5) \right\}.$$

Après toutes ces majorations, le deuxième théorème principal résulte du théorème 11.5, en prenant  $m = m_1$  dans ce dernier.

## 11.4 Démonstration du troisième théorème principal :

Du théorème 11.1 et du lemme 11.4 pour  $A = E$  résulte immédiatement l'estimation :

$$\begin{aligned} \sharp \{ \mathbf{x} \in E(K) / \mathbf{x} \text{ satisfait } (I) \} &\leq \sharp E(K)_{\text{tor}} \left( 1 + \sqrt{\frac{4R(m)}{\hat{h}_{\min}}} \right)^r \\ &\quad + 4\varepsilon^{-\frac{1}{2}} [m(m - 1)(\log m + 9) + m |\log \varepsilon|] \left( 499\varepsilon^{-\frac{m}{2(m-1)}} \right)^r. \end{aligned}$$

Il reste à choisir l'entier  $m$  de façon à optimiser cette estimation. Pour ce faire, on remarque que lorsque  $m$  est assez grand, la quantité :

$$4\varepsilon^{-\frac{1}{2}} [m(m - 1)(\log m + 9) + m |\log \varepsilon|] \left( 499\varepsilon^{-\frac{m}{2(m-1)}} \right)^r$$

devient négligeable devant la quantité :

$$\sharp E(K)_{\text{tor}} \left( 1 + \sqrt{\frac{4R(m)}{\hat{h}_{\min}}} \right)^r \gg R(m)^{\frac{r}{2}} \geq ((2904m)^m \varepsilon^{-\frac{m}{m-1}})^{\frac{r}{2}}.$$

Donc, optimiser l'estimation précédente revient presque à optimiser  $R(m)$ , or ceci a été déjà fait dans la démonstration du premier théorème principal. En prenant comme dans ce dernier :

$$m = m_0 := \left\lceil \sqrt{\frac{2|\log \varepsilon|}{\log |\log \varepsilon| - \log \log |\log \varepsilon| + 16}} + 2 \right\rceil$$

(avec  $[\cdot]$  désigne la partie entière) et en tenant compte des estimations faites au cours de sa démonstration, le théorème 2.3 suit.

## 12 Démonstration des corollaires 2.4, 2.5 et 2.6

L'argument qu'on utilise pour déduire le corollaire 2.4 (resp 2.5 et 2.6) du théorème 2.1 (resp 2.2 et 2.3) est l'objet du lemme suivant :

**Lemme 12.1** *Soit  $E$  une courbe elliptique définie sur un corps de nombres  $K$  de degré  $D$ , plongée dans  $\mathbb{P}_2$  à la Weierstrass, d'équation projective  $Y^2Z = 4X^3 - g_2XZ^2 - g_3Z^3$  ( $g_2, g_3 \in K$ ) et d'élément neutre (en tant que groupe) le point à l'infini  $\mathbf{0}$  représenté dans  $\mathbb{P}_2$  par les coordonnées projectives  $(0 : 1 : 0)$ . Supposons que pour tout réel strictement positif  $\varepsilon$ , pour tout ensemble fini  $S$  de places sur  $K$  et pour toute famille  $(\lambda_v)_{v \in S}$  de réels positifs satisfaisant :*

$$\sum_{v \in S} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \lambda_v = 1,$$

*il existe une application :*

$$\begin{array}{ccc} F : M_k & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ v & \mapsto & F_v \end{array}$$

*tel que le système d'inégalités simultanées :*

$$\text{dist}_v(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \leq e^{-\lambda_v \varepsilon h(\mathbf{x}) - F_v} \quad (v \in S)$$

*-dont les inconnues sont les points  $\mathbf{x}$  de  $E(K)$ - n'admet qu'un nombre fini de solutions constituant un ensemble de cardinal majoré par une fonction positive :*

$$fct_{E,D}(\varepsilon, S)$$

*en  $\varepsilon$  et  $S$ .*

*Alors pour tout réel  $\varepsilon > 0$  et tout sous-ensemble fini  $S$  de places sur  $K$  ; pour tout choix de réels  $0 < \varepsilon'(T) < \varepsilon$ , associés aux sous-ensembles  $T$  de  $S$ , l'inégalité :*

$$\prod_{v \in S} \text{dist}_v(\mathbf{x}, \mathbf{0})^{\frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]}} \leq e^{-\varepsilon h(\mathbf{x}) - \sum_{v \in S} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} F_v}$$

*n'est satisfaite que par un nombre fini de points  $\mathbf{x}$  de  $E(K)$  constituant un ensemble de cardinal majoré par :*

$$\sum_{T \in \mathcal{P}(S)} \binom{A(T) + \text{card}(T) - 1}{\text{card}(T) - 1} fct_{E,D}(\varepsilon'(T), T)$$

*où  $\mathcal{P}(S)$  désigne l'ensemble de toutes les parties de  $S$  et  $A(T)$  le plus petit entier  $\geq \frac{\varepsilon'(T) \text{card}(T)}{\varepsilon - \varepsilon'(T)}$ .*

**Démonstration.**— Soient  $\varepsilon$  un réel strictement positif et  $S$  un ensemble fini de places de  $K$ . Désignons par  $X$  l'ensemble des points  $\mathbf{x}$  de  $E(K)$  satisfaisant l'inégalité :

$$\prod_{v \in S} \text{dist}_v(\mathbf{x}, \mathbf{0})^{\frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]}} \leq e^{-\varepsilon h(\mathbf{x}) - \sum_{v \in S} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} F_v} \quad (12.1)$$

et par  $\pi$  l'application de  $X$  dans  $\mathcal{P}(S)$  associant à chaque point  $\mathbf{x} \in X$  l'ensemble  $\pi(\mathbf{x})$  des places  $v$  de  $S$  pour lesquelles  $\mathbf{x}$  satisfait l'inégalité :

$$\text{dist}_v(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \leq e^{-F_v}.$$

Il est clair que  $\pi$  est bien définie, de plus on peut remarquer d'après (12.1) que pour tout  $\mathbf{x} \in X$ , le sous-ensemble  $\pi(\mathbf{x})$  de  $S$  n'est jamais vide, ce qui revient à dire qu'on a :  $\pi^{-1}(\{\emptyset\}) = \emptyset$ .

Soit maintenant  $T$  un sous-ensemble quelconque de  $S$  tel que  $\pi^{-1}(\{T\}) \neq \emptyset$ ,  $T$  est donc non vide puisque on vient de remarquer que  $\pi^{-1}(\{\emptyset\}) = \emptyset$ . Par définition même de l'application  $\pi$ , on a :

$$\forall \mathbf{x} \in \pi^{-1}(\{T\}), \forall v \in T : \quad \text{dist}_v(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \leq e^{-F_v} \quad (12.2)$$

$$\forall \mathbf{x} \in \pi^{-1}(\{T\}), \forall v \in S \setminus T : \text{dist}_v(\mathbf{x}, \mathbf{0}) > e^{-F_v}. \quad (12.3)$$

Des deux inégalités (12.1) et (12.3), on déduit l'inégalité importante :

$$\forall \mathbf{x} \in \pi^{-1}(\{T\}) : \prod_{v \in T} \text{dist}_v(\mathbf{x}, \mathbf{0})^{\frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]}} \leq e^{-\varepsilon h(\mathbf{x}) - \sum_{v \in T} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} F_v}. \quad (12.4)$$

Définissons maintenant pour tout  $\mathbf{x} \in \pi^{-1}(T)$  et pour toute place  $v$  dans  $T$  le réel positif  $\xi_v(\mathbf{x})$  par :

$$\begin{aligned} \text{dist}_v(\mathbf{x}, \mathbf{0}) &= e^{-\xi_v(\mathbf{x})\varepsilon h(\mathbf{x}) - F_v} & \text{si } h(\mathbf{x}) \neq 0 \\ \xi_v(\mathbf{x}) &:= \frac{1}{\text{card } T} \frac{[K : \mathbb{Q}]}{[K_v : \mathbb{Q}_v]} & \text{si } h(\mathbf{x}) = 0 \end{aligned} \quad (12.5)$$

(lorsque  $h(\mathbf{x}) \neq 0$ , l'existence de  $\xi_v(\mathbf{x})$  est justifiée par (12.2)).

D'après (12.4) on doit avoir :

$$\forall \mathbf{x} \in \pi^{-1}(\{T\}) : \sum_{v \in T} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \xi_v(\mathbf{x}) \geq 1. \quad (12.6)$$

Maintenant on a pour tout  $\mathbf{x} \in \pi^{-1}(\{T\})$  :

$$\begin{aligned} A(T) + \text{card}(T) &\leq A(T) \frac{\varepsilon}{\varepsilon'(T)} \\ &\leq \sum_{v \in T} A(T) \frac{\varepsilon}{\varepsilon'(T)} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \xi_v(\mathbf{x}) \quad (\text{d'après (12.6)}) \\ &\leq \sum_{v \in T} \left[ A(T) \frac{\varepsilon}{\varepsilon'(T)} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \xi_v(\mathbf{x}) \right] + \text{card}(T); \end{aligned}$$

d'où :

$$\forall \mathbf{x} \in \pi^{-1}(\{T\}) : A(T) \leq \sum_{v \in T} \left[ A(T) \frac{\varepsilon}{\varepsilon'(T)} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \xi_v(\mathbf{x}) \right]. \quad (12.7)$$

Cette dernière inégalité (12.7) entraîne -pour tout  $\mathbf{x} \in \pi^{-1}(\{T\})$ - l'existence d'une famille d'entiers positifs  $(a_v(\mathbf{x}))_{v \in T}$  satisfaisant pour toute place  $v \in T$  :

$$\begin{aligned} a_v(\mathbf{x}) &\leq \left[ A(T) \frac{\varepsilon}{\varepsilon'(T)} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \xi_v(\mathbf{x}) \right] \\ &\leq A(T) \frac{\varepsilon}{\varepsilon'(T)} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \xi_v(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (12.8)$$

et

$$\sum_{v \in T} a_v(\mathbf{x}) = A(T). \quad (12.9)$$

Or, l'équation (12.9) admet exactement  $\binom{A(T) + \text{card}(T) - 1}{\text{card}(T) - 1}$  solutions en entiers positifs  $(a_v)_{v \in T}$ , donc il doit exister un sous-ensemble  $E_T$  de  $\pi^{-1}(\{T\})$  de cardinal :

$$\text{card}(E_T) \geq \frac{\text{card}(\pi^{-1}(\{T\}))}{\binom{A(T) + \text{card}(T) - 1}{\text{card}(T) - 1}} \quad (12.10)$$

tel que pour toute place  $v \in T$ , les entiers positifs  $a_v(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in E_T$  soient tous égaux. Notons alors simplement l'entier positif  $a_v(\mathbf{x})$  ( $\mathbf{x} \in E_T$ ) par  $a_v$  (pour toute place  $v \in T$ ). Ces  $(a_v)_{v \in T}$  satisfont d'après (12.8) et (12.9) :

$$\forall \mathbf{x} \in E_T : \quad a_v \leq A(T) \frac{\varepsilon}{\varepsilon'(T)} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \xi_v(\mathbf{x}) \quad (12.11)$$

et

$$\sum_{v \in T} a_v = A(T). \quad (12.12)$$

Posons aussi pour toute place  $v \in T$  :

$$\lambda_v := \frac{a_v}{A(T)} \frac{[K : \mathbb{Q}]}{[K_v : \mathbb{Q}_v]}. \quad (12.13)$$

D'après (12.11) et (12.12) ces réels positifs  $(\lambda_v)_{v \in T}$  satisfont pour toute place  $v \in T$  et tout  $\mathbf{x} \in E_T$  :

$$\lambda_v \varepsilon'(T) \leq \varepsilon \xi_v(\mathbf{x}) \quad (12.14)$$

et

$$\sum_{v \in T} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \lambda_v = 1. \quad (12.15)$$

On vérifie aisément grâce à l'inégalité (12.14) et à l'égalité (de définition) (12.5) (lorsque  $h(\mathbf{x}) \neq 0$ ) et grâce à l'inégalité (12.2) (lorsque  $h(\mathbf{x}) = 0$ ) qu'on a :

$$\forall \mathbf{x} \in E_T : \quad \text{dist}_v(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \leq e^{-\lambda_v \varepsilon'(T) h(\mathbf{x}) - F_v} \quad \forall v \in T. \quad (12.16)$$

Or d'après l'hypothèse du lemme 12.1, le nombre de solutions  $\mathbf{x} \in E(K)$  du système (12.16) est majoré par  $fc_{E,D}(\varepsilon'(T), T)$ . D'où :

$$\text{card}(E_T) \leq fc_{E,D}(\varepsilon'(T), T) \quad (12.17)$$

et puis, par (12.10), on en déduit qu'on a :

$$\text{card}(\pi^{-1}(\{T\})) \leq \binom{A(T) + \text{card}(T) - 1}{\text{card}(T) - 1} fct_{E,D}(\varepsilon'(T), T). \quad (12.18)$$

Remarquons enfin que cette dernière inégalité (12.18) est trivialement satisfaite lorsque  $\pi^{-1}(\{T\}) = \emptyset$ , donc (12.18) est valable pour tout  $T$  dans  $\mathcal{P}(S)$ .

En additionnant membre à membre les inégalités (12.18) correspondant à chaque  $T \in \mathcal{P}(S)$ , on obtient :

$$\sum_{T \in \mathcal{P}(S)} \text{card}(\pi^{-1}(\{T\})) \leq \sum_{T \in \mathcal{P}(S)} \binom{A(T) + \text{card}(T) - 1}{\text{card}(T) - 1} fct_{E,D}(\varepsilon'(T), T).$$

Pour conclure, il ne reste qu'à remarquer que  $\sum_{T \in \mathcal{P}(S)} \text{card}(\pi^{-1}(\{T\})) = \text{card}(X)$ . La démonstration est achevée. ■

Dans ce qui suit, nous allons en déduire le corollaire 2.4 du théorème 2.1 en utilisant le lemme 12.1 précédent ; les deux autres corollaires 2.5 et 2.6 se déduisent respectivement des deux théorèmes 2.2 et 2.3 exactement de la même manière. Nous appliquons le lemme 12.1 avec :

$$\begin{aligned} F_v &:= 56(\eta + 5)\varepsilon^{-1 - \frac{183}{\log|\log \varepsilon|}} \lambda_v + 2m_v + c_v \quad \forall v \in M_K \\ fct_E(\varepsilon, S) &= 34\varepsilon^{-1/2} |\log \varepsilon|^{3/2} (\log |\log \varepsilon|)^{-1/2} \left[ 499\varepsilon^{-1/2} \exp\left(\sqrt{|\log \varepsilon| |\log |\log \varepsilon||}\right) \right]^r \\ &= fct_E(\varepsilon) \quad (\text{indépendante de } S) \end{aligned}$$

$$\forall T \in \mathcal{P}(S) : \quad \varepsilon'(T) = \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad A(T) = \text{card}(T).$$

Ainsi, d'après le théorème 2.1, l'hypothèse principale du lemme 12.1 est bien vérifiée, donc ce dernier entraîne que l'ensemble des points  $\mathbf{x}$  de  $E(K)$  satisfaisant l'inégalité :

$$\prod_{v \in S} \text{dist}_v(\mathbf{x}, \mathbf{0})^{\frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]}} \leq e^{-\varepsilon h(\mathbf{x}) - \sum_{v \in S} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} F_v}$$

est de cardinal :

$$\leq \sum_{T \in \mathcal{P}(S)} \binom{A(T) + \text{card}(T) - 1}{\text{card}(T) - 1} fct_E(\varepsilon'(T), T),$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} &\leq fct_E\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot \sum_{T \in \mathcal{P}(S)} \binom{2\text{card}(T) - 1}{\text{card}(T) - 1} \\ &\leq fct_E\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot \sum_{n=0}^{\text{card}(S)} \binom{\text{card}(S)}{n} \binom{2n-1}{n-1} \quad (\text{en posant } n = \text{card}(T)) \\ &\leq fct_E\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot \sum_{n=0}^{\text{card}(S)} \binom{\text{card}(S)}{n} 4^n \\ &\leq 5^{\text{card}(S)} \cdot fct_E\left(\frac{\varepsilon}{2}\right). \end{aligned}$$

Par ailleurs, en utilisant l'hypothèse :

$$\sum_{v \in S} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \lambda_v = 1$$

et en majorant  $\sum_{v \in S} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} m_v$  par :

$$\sum_{v \in S} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} m_v \leq \sum_{v \in M_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} m_v =: \eta$$

et  $\sum_{v \in S} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} c_v$  par :

$$\sum_{v \in S} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} c_v \leq \sum_{v \in M_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} c_v = \sum_{v \in M_{K^\infty}} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} c_v = 16,$$

on en déduit pour la quantité :  $\sum_{v \in S} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} F_v$  la majoration :

$$\begin{aligned} \sum_{v \in S} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} F_v &\leq 56(\eta + 5) \varepsilon^{-1 - \frac{183}{\log |\log \varepsilon|}} + 2\eta + 16 \\ &\leq 57(\eta + 5) \varepsilon^{-1 - \frac{183}{\log |\log \varepsilon|}}; \end{aligned}$$

ce qui entraîne que l'inégalité :

$$\prod_{v \in S} \text{dist}_v(\mathbf{x}, \mathbf{0})^{\frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]}} \leq e^{-\varepsilon h(\mathbf{x}) - \sum_{v \in S} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} F_v}$$

est impliquée par l'inégalité :

$$\prod_{v \in S} \text{dist}_v(\mathbf{x}, \mathbf{0})^{\frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]}} \leq e^{-\varepsilon h(\mathbf{x}) - 57(\eta + 5) \varepsilon^{-1 - \frac{183}{\log |\log \varepsilon|}}}.$$

Le corollaire 2.4 s'ensuit. La démonstration est achevée.  $\blacksquare$

## 13 Formulaire

Dans tous ce paragraphe, soit  $E$  une courbe elliptique définie sur un corps de nombres  $K$  et plongée à la Weierstrass dans l'espace projectif  $\mathbb{P}_2$  et soit :

$$Y^2 Z = 4X^3 - g_2 X Z^2 - g_3 Z^3 \quad g_2, g_3 \in K$$

son équation projective dans ce plongement.

Nous donnons dans le théorème 13.1 qui suit trois familles de formules d'addition explicites sur  $E$  ainsi que les cartes où chacune de ces familles de formules est valable, de manière à avoir un atlas constitué de trois cartes de  $E^2$ .

Dans le théorème 13.3 nous montrons, par un procédé de récurrence, l'existence d'une famille de formes représentant globalement la multiplication d'un point de  $E$  par un entier positif  $n$  donné. Le degré et la hauteur de ces formes est bien contrôlé en fonction de  $n$  et de la hauteur de  $E$ . Notre référence principale pour ce théorème 13.3 est le chapitre 2 de [La3].

Enfin dans le théorème 13.14 nous donnons une valeur explicite pour la constante de Néron-Tate de  $E \hookrightarrow \mathbb{P}_2$  qui est essentiellement celle de [Zi-Sch] et [Da1].

### 13.1 Formules d'addition sur $E$ :

Nous appelons système complet de familles de formes représentant l'addition sur  $E \hookrightarrow \mathbb{P}_2$ , la donnée d'un nombre fini de familles de formes  $\underline{A}_i = (A_{i0}, A_{i1}, A_{i2}), i \in I$  ( $I$  fini) de  $K[(X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2)]$  et d'un nombre fini d'ouverts non vides  $\Omega_i, i \in I$  de  $E^2$  formant un recouvrement pour  $E^2$  tel que pour tout  $i \in I$  et pour



tout couple de points  $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \in \Omega_i \subset E^2$ , le point  $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$  de  $E$  peut être représenté dans  $\mathbb{P}_2$  par le système de coordonnées projectives  $\underline{A}_i(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = (A_{i0}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) : A_{i1}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) : A_{i2}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2))$ .

Notons que dans un système complet de familles de formes représentant l'addition sur  $E$ , il n'est pas vraiment nécessaire de préciser les ouverts  $\Omega_i, i \in I$  de  $E^2$  correspondant à chacune des familles de formes  $\underline{A}_i, i \in I$ . En effet si  $\underline{A} = (A_0, A_1, A_2)$  est une famille de formes de  $K[(X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2)]$  représentant l'addition sur  $E$  sur un ouvert non vide  $\Omega$  de  $E^2$  alors  $\underline{A}$  doit certainement représenter l'addition sur  $E$  sur tout le sous-ensemble de  $E^2$  là où les trois formes  $A_0, A_1$  et  $A_2$  ne s'annulent pas simultanément. Ce dernier étant un ouvert de  $E^2$ , ne dépend que de la famille de formes  $\underline{A}$  et contient  $\Omega$ , qu'il peut avantageusement remplacer. On a le théorème suivant :

**Théorème 13.1** *Un système complet de familles de formes représentant l'addition sur  $E$  est donné par :*

$$\begin{aligned} 1) \quad A_0 &:= Y_1^2 X_2 Z_2 - 2X_1 Y_1 Y_2 Z_2 + 2Y_1 Z_1 X_2 Y_2 - 3g_3 X_1 Z_1 Z_2^2 - g_2 X_1^2 Z_2^2 \\ &\quad + 3g_3 Z_1^2 X_2 Z_2 + g_2 Z_1^2 X_2^2 - X_1 Z_1 Y_2^2 \\ A_1 &:= Y_1^2 Y_2 Z_2 + 3g_3 Y_1 Z_1 Z_2^2 + g_2 X_1 Y_1 Z_2^2 + 2g_2 Y_1 Z_1 X_2 Z_2 - Y_1 Z_1 Y_2^2 \\ &\quad - 12X_1 Y_1 X_2^2 - 3g_3 Z_1^2 Y_2 Z_2 - 2g_2 X_1 Z_1 Y_2 Z_2 - g_2 Z_1^2 X_2 Y_2 \\ &\quad + 12X_1^2 X_2 Y_2 \\ A_2 &:= Y_1^2 Z_2^2 + g_2 X_1 Z_1 Z_2^2 - g_2 Z_1^2 X_2 Z_2 - 12X_1^2 X_2 Z_2 - Z_1^2 Y_2^2 \\ &\quad + 12X_1 Z_1 X_2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad A_0 &:= 4Y_1^2 X_2^2 + g_2^2 X_1 Z_1 Z_2^2 + 12g_3 X_1^2 Z_2^2 - g_2^2 Z_1^2 X_2 Z_2 \\ &\quad + 4g_2 X_1^2 X_2 Z_2 - 12g_3 Z_1^2 X_2^2 - 4g_2 X_1 Z_1 X_2^2 - 4X_1^2 Y_2^2 \\ A_1 &:= 4Y_1^2 X_2 Y_2 - g_2^2 Y_1 Z_1 Z_2^2 - 12g_3 X_1 Y_1 Z_2^2 - 24g_3 Y_1 Z_1 X_2 Z_2 \\ &\quad - 8g_2 X_1 Y_1 X_2 Z_2 - 4g_2 Y_1 Z_1 X_2^2 - 4X_1 Y_1 Y_2^2 + g_2^2 Z_1^2 Y_2 Z_2 \\ &\quad + 24g_3 X_1 Z_1 Y_2 Z_2 + 4g_2 X_1^2 Y_2 Z_2 + 12g_3 Z_1^2 X_2 Y_2 + 8g_2 X_1 Z_1 X_2 Y_2 \\ A_2 &:= 4Y_1^2 X_2 Z_2 + 8X_1 Y_1 Y_2 Z_2 - 8Y_1 Z_1 X_2 Y_2 - 12g_3 X_1 Z_1 Z_2^2 \\ &\quad - 4g_2 X_1^2 Z_2^2 + 12g_3 Z_1^2 X_2 Z_2 + 4g_2 Z_1^2 X_2^2 - 4X_1 Z_1 Y_2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad A_0 &:= 4Y_1^2 X_2 Y_2 + g_2^2 Y_1 Z_1 Z_2^2 + 12g_3 X_1 Y_1 Z_2^2 + 24g_3 Y_1 Z_1 X_2 Z_2 \\ &\quad + 8g_2 X_1 Y_1 X_2 Z_2 + 4g_2 Y_1 Z_1 X_2^2 + 4X_1 Y_1 Y_2^2 + g_2^2 Z_1^2 Y_2 Z_2 \\ &\quad + 24g_3 X_1 Z_1 Y_2 Z_2 + 4g_2 X_1^2 Y_2 Z_2 + 12g_3 Z_1^2 X_2 Y_2 + 8g_2 X_1 Z_1 X_2 Y_2 \\ A_1 &:= 4Y_1^2 Y_2^2 + (g_2^3 - 36g_3^2) Z_1^2 Z_2^2 - 12g_2 g_3 X_1 Z_1 Z_2^2 - 4g_2^2 X_1^2 Z_2^2 \\ &\quad - 12g_2 g_3 Z_1^2 X_2 Z_2 - 16g_2^2 X_1 Z_1 X_2 Z_2 - 144g_3 X_1^2 X_2 Z_2 \\ &\quad - 4g_2^2 Z_1^2 X_2^2 - 144g_3 X_1 Z_1 X_2^2 - 48g_2 X_1^2 X_2^2 \\ A_2 &:= 4Y_1^2 Y_2 Z_2 - 12g_3 Y_1 Z_1 Z_2^2 - 4g_2 X_1 Y_1 Z_2^2 - 8g_2 Y_1 Z_1 X_2 Z_2 \\ &\quad + 4Y_1 Z_1 Y_2^2 + 48X_1 Y_1 X_2^2 - 12g_3 Z_1^2 Y_2 Z_2 - 8g_2 X_1 Z_1 Y_2 Z_2 \\ &\quad - 4g_2 Z_1^2 X_2 Y_2 + 48X_1^2 X_2 Y_2 \end{aligned}$$

Ainsi, ces trois familles sont constituées de formes de bidegré  $(2, 2)$  et sont -pour toute place  $v$  de  $K$ - de hauteur logarithmique  $v$ -adique  $h_v(\underline{A})$  majorée par :

$$\begin{aligned}
\text{pour 1)} \quad h_v(\underline{A}) &\leq \begin{cases} m_v + \log 12 & \text{si } v \text{ est infinie} \\ m_v & \text{si } v \text{ est finie} \end{cases} \\
\text{pour 2)} \quad h_v(\underline{A}) &\leq \begin{cases} 2m_v + \log 24 & \text{si } v \text{ est infinie} \\ 2m_v & \text{si } v \text{ est finie} \end{cases} \\
\text{pour 3)} \quad h_v(\underline{A}) &\leq \begin{cases} 3m_v + \log 144 & \text{si } v \text{ est infinie} \\ 3m_v & \text{si } v \text{ est finie} \end{cases}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, ces trois familles de 1), 2) et 3) sont de hauteurs de Gauss-Weil majorées respectivement par  $\eta + \log 12$ ,  $2\eta + \log 24$  et  $3\eta + \log 144$ .

Par ailleurs, quand  $v$  est une place infinie sur  $K$ , ces trois familles de 1), 2) et 3) sont de longueurs logarithmiques  $v$ -adique  $\ell_v(\underline{A})$  majorées respectivement par :  $m_v + \log 38$ ,  $2m_v + \log 106$  et  $3m_v + \log 425$ .

**Démonstration.**— Ce système complet de formules d'additions est celui donné dans [La-Ru], on n'a fait que développer les calculs de cette référence. ■

**Remarque 13.2** Les trois familles de formules d'additions données par le théorème 13.1 sont aussi de hauteurs de Gauss-Weil majorées par  $h(1 : g_2^3 : g_3^2) + \log 144$ .

### 13.2 Formules de multiplication d'un point de $E$ par un entier positif donné :

Nous consacrons ce sous-paragraphe à la démonstration du théorème suivant :

**Théorème 13.3** Pour tout entier  $n \geq 1$ , il existe une famille de formes  $\underline{F}^{(n)} := (F_0^{(n)}, F_1^{(n)}, F_2^{(n)})$  de  $K[X, Y, Z]$  de degré  $n^2$  chacune, représentant globalement la multiplication par  $n$  sur  $E \hookrightarrow \mathbb{P}_2$  tel que pour toute place finie (resp infinie)  $v$  de  $K$ , la hauteur logarithmique locale  $v$ -adique  $h_v$  (resp la longueur logarithmique locale  $v$ -adique  $\ell_v$ ) de la famille  $\underline{F}^{(n)}$  est majorée par  $\frac{3}{2}m_v.n^2$  (resp par  $\frac{3}{2}(m_v + 3).n^2$ ). Par conséquent cette famille de formes  $\underline{F}^{(n)}$  est de hauteur de Gauss-Weil majorée par :

$$\tilde{h}(\underline{F}^{(n)}) \leq \frac{3}{2}(\eta + 3).n^2.$$

Afin de démontrer ce théorème, on se réfère dans toute la suite de ce sous-paragraphe au chapitre 2 de [La3]. Soit  $\wp$  la fonction de Weierstrass associée à  $E$  et  $\Lambda$  le réseau de périodes de  $E$ . La courbe elliptique  $E$  est alors isomorphe au groupe abélien  $\mathbb{C}/\Lambda$  et l'isomorphisme en question est donné par :

$$\begin{aligned}
\rho : \mathbb{C}/\Lambda &\longrightarrow E \\
z &\longmapsto (\wp(z) : \wp'(z) : 1) \quad \text{si } z \neq 0 \\
0 &\longmapsto (0 : 1 : 0).
\end{aligned}$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , notons  $(\mathbb{C}/\Lambda)_n$  le sous-groupe des points de  $n$ -torsion de  $\mathbb{C}/\Lambda$ . D'après le chapitre 2 de [La3], il existe pour tout entier  $n \geq 1$  une fonction elliptique  $f_n$  vérifiant :

$$f_n(z)^2 = n^2 \prod_{u \in (\mathbb{C}/\Lambda)_n, u \neq 0} (\wp(z) - \wp(u)). \quad (13.1)$$

Pour tout  $n \geq 1$ , les zéros de la fonction elliptique  $f_n$  sont les points de  $n$ -torsion de  $\mathbb{C}/\Lambda$  autre que 0 et se sont tous des zéros simples, par ailleurs ses pôles sont les points du réseau  $\Lambda$  et sont évidemment d'ordre  $(n^2 - 1)$  chacun. On sait aussi d'après [La3] que les fonctions  $f_n$ , ( $n \geq 1$ ) s'écrivent comme des polynômes à coefficients

dans  $K$  en  $\wp(z)$  et  $\wp'(z)$ , c'est-à-dire qu'il existe une suite de polynômes  $(Q_n)_{n \geq 1}$  de  $K[X, Y]$  tels que :

$$f_n(z) = Q_n(\wp(z), \wp'(z)) \quad \forall n \geq 1.$$

On peut même préciser qu'on a :

- si  $n$  est impair :  $Q_n(X, Y) = P_n(X)$  où  $P_n$  est un polynôme de  $K[X]$  de degré  $\frac{n^2-1}{2}$  et de coefficient dominant  $n$ .
- si  $n$  est pair :  $Q_n(X, Y) = \frac{1}{2}YP_n(X)$  où  $P_n$  est un polynôme de  $K[X]$  de degré  $\frac{n^2-4}{2}$  et de coefficient dominant  $n$ .

Il est vérifié dans [La3] qu'on a :

$$Q_1(X, Y) = 1, \quad Q_2(X, Y) = Y, \quad Q_3(X, Y) = 3X^4 - \frac{3}{2}g_2X^2 - 3g_3X - \frac{1}{16}g_2^2$$

$$\text{et } Q_4(X, Y) = \frac{1}{2}Y \left( 4X^6 - 5g_2X^4 - 20g_3X^3 - \frac{5}{4}g_2^2X^2 - g_2g_3X - 2g_3^2 + \frac{g_2^3}{16} \right).$$

Posons aussi, par convention,  $Q_{-1} \equiv -1$  et  $Q_0 \equiv 0$ . Le théorème 1.3 du chapitre 2 de [La3] donne des formules de récurrence permettant de calculer de proche en proche ces polynômes  $Q_n, n \geq 1$ . Ces formules sont :

$$\forall n \geq 1 : \quad \begin{cases} Q_{2n+1} &= Q_{n+2}Q_n^3 - Q_{n-1}Q_{n+1}^3 \\ YQ_{2n} &= Q_n(Q_{n+2}Q_{n-1}^2 - Q_{n-2}Q_{n+1}^2) \end{cases} \quad (13.2)$$

Grâce à ces formules de récurrence, on peut donner des estimations pour les hauteurs (ou longueurs) locales des polynômes  $Q_n, n \geq 1$ . On obtient le lemme suivant :

**Lemme 13.4** *Soit  $v$  une place sur  $K$  et  $\xi := \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ , on a :*

- quand  $v$  est infinie et  $n \geq 2$  :

$$L_v(Q_n) \leq \begin{cases} \xi(4M_v)^{\frac{n^2-1}{4}} & \text{si } n \text{ est impair} \\ \xi(4M_v)^{\frac{n^2-4}{4}} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases},$$

- quand  $v$  est finie,  $v \mid 2$  et  $n \geq 1$  :

$$H_v(Q_n) \leq \begin{cases} (4M_v)^{\frac{n^2-1}{4}} & \text{si } n \text{ est impair} \\ (4M_v)^{\frac{n^2-4}{4}} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases},$$

- et quand  $v$  est finie,  $v \nmid 2$  et  $n \geq 1$  :

$$H_v(Q_n) \leq \begin{cases} M_v^{\frac{n^2-1}{4}} & \text{si } n \text{ est impair} \\ M_v^{\frac{n^2-4}{4}} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}.$$

**Démonstration.**— On procède par récurrence.

-Dans le cas  $v$  infinie, on vérifie l'estimation du lemme 13.4 pour  $n = 2, 3, 4, 5, 6$  et puis on utilise les formules (13.2) en distinguant les cas :  $n = 4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ ) pour la récurrence.

-Dans le cas  $v$  finie, on vérifie l'estimation du lemme 13.4 pour  $n = 1, 2, 3, 4$  et puis on utilise aussi les formules (13.2) en distinguant les mêmes cas que précédemment pour établir la récurrence. ■

Du lemme 13.4 découle immédiatement le corollaire suivant :

**Corollaire 13.5** Soit  $v$  une place sur  $K$  et  $\xi := \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ . On a :

- quand  $v$  est infinie et  $n \geq 2$  :

$$L_v(P_n) \leq \begin{cases} \xi(4M_v)^{\frac{n^2-1}{4}} & \text{si } n \text{ est impair} \\ 2\xi(4M_v)^{\frac{n^2-4}{4}} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases},$$

- quand  $v$  est finie,  $v \mid 2$  et  $n \geq 1$  :

$$H_v(P_n) \leq \begin{cases} (4M_v)^{\frac{n^2-1}{4}} & \text{si } n \text{ est impair} \\ \frac{1}{2}(4M_v)^{\frac{n^2-4}{4}} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases},$$

- et quand  $v$  est finie,  $v \nmid 2$  et  $n \geq 1$  :

$$H_v(P_n) \leq \begin{cases} M_v^{\frac{n^2-1}{4}} & \text{si } n \text{ est impair} \\ M_v^{\frac{n^2-4}{4}} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}.$$

Enfin, on trouve aussi dans [La3] des formules exprimant les fonctions elliptiques  $\wp(nz)$  et  $\wp'(nz)$  (pour un entier  $n \in \mathbb{N}^*$ ) en fonction de  $\wp(z)$ ,  $\wp'(z)$  et des  $f_m, m \in \mathbb{N}^*$ . Ces formules sont :

$$\begin{cases} \wp(nz) &= \wp(z) - \frac{f_{n+1}(z) \cdot f_{n-1}(z)}{f_n(z)^2} \\ \wp'(nz) &= \frac{f_{2n}(z)}{f_n(z)^4} = \frac{1}{\wp'(z)} \cdot \frac{f_{n+2}(z)f_{n-1}(z)^2 - f_{n-2}(z)f_{n+1}(z)^2}{f_n(z)^3} \end{cases} \quad (13.3)$$

Ces formules (13.3) donnent -a priori- des formes représentant la multiplication d'un point de  $E$  par un entier  $n \geq 1$ , mais écrites en fonction des polynômes  $Q_m, m \geq 1$ . On pourra donc estimer leurs degrés et hauteurs grâce au lemme 13.4. En effet, soient pour  $n \geq 1$  les polynômes suivants de  $K[X, Y]$  :

$$\begin{aligned} \tilde{F}_0^{(n)}(X, Y) &:= XQ_n^3(X, Y) - Q_nQ_{n+1}Q_{n-1}(X, Y) \\ \tilde{F}_1^{(n)}(X, Y) &:= \frac{1}{Y} (Q_{n+2}Q_{n-1}^2 - Q_{n-2}Q_{n+1}^2)(X, Y) \\ \tilde{F}_2^{(n)}(X, Y) &:= Q_n^3(X, Y). \end{aligned} \quad (13.4)$$

On peut énoncer :

**Lemme 13.6** Pour tout point  $\mathbf{p} := (x : y : 1)$  de  $E \setminus \{0\}$  et tout entier  $n \geq 1$ , le point  $n.\mathbf{p}$  de  $E$  est représenté dans  $\mathbb{P}_2$  par les coordonnées projectives :

$$n.\mathbf{p} = \left( \tilde{F}_0^{(n)}(x, y) : \tilde{F}_1^{(n)}(x, y) : \tilde{F}_2^{(n)}(x, y) \right).$$

**Démonstration.**— Soit  $\mathbf{p} := (x : y : 1) := (\wp(z) : \wp'(z) : 1)$  avec  $z \in (\mathbb{C}/\Lambda)^*$ , un point de  $E \setminus \{0\}$  et soit  $n$  un entier  $\geq 1$ . On peut représenter le point  $n.\mathbf{p}$  de  $E$  dans l'espace projectif  $\mathbb{P}_2$  par :

$$\begin{aligned} n.\mathbf{p} &= (f_n^3(z)\wp(nz) : f_n^3(z)\wp'(nz) : f_n^3(z)) \\ &= \left( f_n^3(z)\wp(z) - f_n(z)f_{n+1}(z)f_{n-1}(z) : \frac{f_{n+2}(z)f_{n-1}(z)^2 - f_{n-2}(z)f_{n+1}(z)^2}{\wp'(z)} : f_n^3(z) \right) \\ &= \left( xQ_n^3(x, y) - Q_nQ_{n+1}Q_{n-1}(x, y) : \frac{1}{y}(Q_{n+2}Q_{n-1}^2 - Q_{n-2}Q_{n+1}^2)(x, y) : Q_n^3(x, y) \right) \\ &= \left( \tilde{F}_0^{(n)}(x, y) : \tilde{F}_1^{(n)}(x, y) : \tilde{F}_2^{(n)}(x, y) \right) \end{aligned}$$

où la deuxième égalité vient des formules (13.3). Pour compléter la preuve de notre lemme, il ne reste qu'à vérifier que cette représentation du point  $n.\mathbf{p}$  est bien définie dans  $\mathbb{P}_2$ , c'est-à-dire que les trois expressions  $\tilde{F}_0^{(n)}(x, y)$ ,  $\tilde{F}_1^{(n)}(x, y)$  et  $\tilde{F}_2^{(n)}(x, y)$  ne peuvent s'annuler simultanément pour un point  $\mathbf{p} = (x : y : 1)$  de  $E \setminus \{0\}$ . Procédons par l'absurde. Supposons que pour un certain point  $\mathbf{p} = (x : y : 1) = (\wp(z) : \wp'(z) : 1)$  de  $E \setminus \{0\}$  et pour un certain  $n \geq 1$  on a :  $\tilde{F}_0^{(n)}(x, y) = \tilde{F}_1^{(n)}(x, y) = \tilde{F}_2^{(n)}(x, y) = 0$ , ceci revient à dire qu'on a :

$$Q_n(x, y) = \frac{1}{y}(Q_{n+2}Q_{n-1}^2 - Q_{n-2}Q_{n+1}^2)(x, y) = 0,$$

qui s'écrit en fonction de  $z$  :

$$f_n(z) = \frac{1}{\wp'(z)}(f_{n+2}f_{n-1}^2 - f_{n-2}f_{n+1}^2)(z) = 0$$

et qu'on peut écrire aussi d'après les formules (13.3) :

$$f_n(z) = \left(\frac{f_{2n}}{f_n}\right)(z) = 0.$$

Maintenant, on a d'une part :

$$f_n(z) = 0 \Leftrightarrow z \in (\mathbb{C}/\Lambda)_n, \quad z \neq 0$$

et d'autre part, en reprenant l'expression (13.1) pour  $f_n(z)^2$  on a :

$$\left(\frac{f_{2n}}{f_n}\right)^2(z) = 4 \prod_{\substack{u \in (\mathbb{C}/\Lambda)_{2n} \\ u \notin (\mathbb{C}/\Lambda)_n}} (\wp(z) - \wp(u))$$

donc :

$$\frac{f_{2n}}{f_n}(z) = 0 \Leftrightarrow z \in (\mathbb{C}/\Lambda)_{2n}, \quad z \notin (\mathbb{C}/\Lambda)_n.$$

On voit ainsi que les deux fonctions elliptiques  $f_n$  et  $\frac{f_{2n}}{f_n}$  ne peuvent pas s'annuler simultanément, par conséquent  $\tilde{F}_0^{(n)}(X, Y)$ ,  $\tilde{F}_1^{(n)}(X, Y)$  et  $\tilde{F}_2^{(n)}(X, Y)$  ne peuvent pas s'annuler simultanément aussi. La représentation  $n\mathbf{p} = (\tilde{F}_0^{(n)}(X, Y) : \tilde{F}_1^{(n)}(X, Y) : \tilde{F}_2^{(n)}(X, Y))$  est effectivement bien définie sur  $\mathbb{P}_2$  pour tout point  $\mathbf{p} = (x : y : 1) \in E \setminus \{0\}$  et tout entier  $n \geq 1$  ce qui achève cette démonstration. ■

**Problème :** On peut voir facilement que les polynômes  $\tilde{F}_0^{(n)}$ ,  $\tilde{F}_1^{(n)}$  et  $\tilde{F}_2^{(n)}$  ( $n \geq 1$ ) de  $K[X, Y]$ , représentant la multiplication d'un point  $\mathbf{p}$  de  $E \setminus \{0\}$  par l'entier positif  $n$ , sont de degré  $\leq \frac{3}{2}n^2$  et de hauteur de Gauss-Weil majorée par  $\frac{3}{4}(\eta + 4).n^2$  (qu'on estime grâce au lemme 13.4). Le problème est que lorsqu'on les homogénéise en des formes  $F_0^{(n)}$ ,  $F_1^{(n)}$  et  $F_2^{(n)}$  de  $K[X, Y, Z]$ , les formes homogènes obtenues sont non définies à l'origine, ce qui est indésirable. Pour régler ce problème, nous allons réduire (en un certain sens) les polynômes  $\tilde{F}_0^{(n)}$ ,  $\tilde{F}_1^{(n)}$  et  $\tilde{F}_2^{(n)}$  ( $n \geq 1$ ) modulo l'équation affine de la courbe elliptique  $E$ , qui est  $Y^2 = 4X^3 - g_2X - g_3$  et nous homogénéisons ensuite les polynômes réduits ainsi obtenus qui donnerons cette fois-ci des formes représentant globalement la multiplication d'un point de  $E$  par  $n$ . Il est important de signaler que dans cette réduction on gagne un peu sur les degrés (on obtient des formes de degré  $n^2$ , ce qui est optimal) mais on perd sur l'estimation de la hauteur (on obtient une famille de formes de hauteurs majorées par  $\frac{3}{2}(\eta + 3).n^2$ ).

**Réduction des polynômes  $\tilde{F}_0^{(n)}, \tilde{F}_1^{(n)}$  et  $\tilde{F}_2^{(n)}$  modulo l'équation affine de  $E$  :**

Nous définissons  $T$  l'application de réduction modulo l'équation affine de la courbe elliptique  $E$  par :

$$T : K[X, Y] \longrightarrow K[X, Y]$$

associant à chaque polynôme  $P$  de  $K[X, Y]$  le polynôme  $T(P)$  de  $K[X, Y]$  dont le degré en  $X$  est  $\leq 2$  et qui équivaut à  $P$  modulo l'équation affine de  $E$ . Il est clair que  $T$  est unique et bien définie. Etant donné  $P$  un polynôme de  $K[X, Y]$ , pour calculer concrètement  $T(P)$  on procède comme suit :

- si  $d_X P \leq 2$ , on prend  $T(P) = P$ ,
- sinon,  $X^3$  divise forcément l'un au moins des monômes de  $P$ , on remplace un tel  $X^3$  par  $\frac{1}{4}(Y^2 + g_2X + g_3)$  et on réitère cette opération jusqu'à l'obtention d'un polynôme de degré en  $X$  inférieur ou égal à 2. C'est ce dernier qu'on prend pour  $T(P)$ .

Posons pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $T_n := T(X^n)$ , les  $T_n, n \in \mathbb{N}$ , sont donc des polynômes de  $K[X, Y]$  dont le degré en  $X$  est  $\leq 2$ . Les premiers  $T_n$  sont :

$$T_0(X, Y) = 1, \quad T_1(X, Y) = X, \quad T_2(X, Y) = X^2,$$

$$T_3(X, Y) = \frac{1}{4}(Y^2 + g_2X + g_3) = \frac{1}{4}g_2X + \frac{1}{4}(Y^2 + g_3), \dots \text{ etc}$$

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , écrivons  $T_n$  comme polynôme en  $X$  (de degré  $\leq 2$ ) à coefficients polynômes de  $K[Y]$  :

$$T_n(X, Y) = A_n(Y)X^2 + B_n(Y)X + C_n(Y). \quad (13.5)$$

Les premiers éléments des suites  $(A_n)_n, (B_n)_n$  et  $(C_n)_n$  sont alors :

$$\begin{aligned} A_0 &\equiv 0, & A_1 &\equiv 0, & A_2 &\equiv 1; \\ B_0 &\equiv 0, & B_1 &\equiv 1, & B_2 &\equiv 0; \\ C_0 &\equiv 1, & C_1 &\equiv 0, & C_2 &\equiv 0. \end{aligned}$$

Nous établissons maintenant des relations de récurrence permettant de calculer de proche en proche les  $A_n, B_n, C_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). On a pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} T_{n+1} &:= T(X^{n+1}) \\ &= T(XT_n) \\ &= T(A_n(Y)X^3 + B_n(Y)X^2 + C_n(Y)X) \\ &= A_n(Y) \left[ \frac{1}{4}(Y^2 + g_2X + g_3) \right] + B_n(Y)X^2 + C_n(Y)X \\ &= B_n(Y)X^2 + \left( \frac{1}{4}g_2A_n(Y) + C_n(Y) \right) X + \frac{1}{4}(Y^2 + g_3)A_n(Y), \end{aligned}$$

d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \begin{cases} A_{n+1} &= B_n \\ B_{n+1} &= \frac{1}{4}g_2A_n + C_n \\ C_{n+1} &= \frac{1}{4}(Y^2 + g_3)A_n \end{cases} \quad (13.6)$$

En utilisant ces formules, on déduira d'autres formules de récurrence liant les termes de chacune des trois suites  $(A_n)_n, (B_n)_n$  et  $(C_n)_n$  indépendamment des termes des deux autres. On montre qu'on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{cases} A_{n+3} &= \frac{1}{4}g_2A_{n+1} + \frac{1}{4}(Y^2 + g_3)A_n \\ B_{n+3} &= \frac{1}{4}g_2B_{n+1} + \frac{1}{4}(Y^2 + g_3)B_n \\ C_{n+3} &= \frac{1}{4}g_2C_{n+1} + \frac{1}{4}(Y^2 + g_3)C_n \end{cases} \quad (13.7)$$

Maintenant, grâce à ces formules de récurrence (13.6) et (13.7), nous allons estimer les degrés et les hauteurs locales des polynômes  $A_n, B_n$  et  $C_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) de  $K[Y]$  et nous en déduisons plus généralement des estimations pour les degrés et les hauteurs locales d'une réduction  $T(P)$  d'un polynôme  $P \in K[X]$  modulo l'équation affine de notre courbe elliptique  $E$ , en fonction du degré et des hauteurs locales de  $P$ ; il ne reste après cca qu'à appliquer ces estimations aux polynômes  $\tilde{F}_0^{(n)}, \tilde{F}_1^{(n)}$  et  $\tilde{F}_2^{(n)}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) pour en déduire des estimations pour le degré, les hauteurs locales ainsi que la hauteur de Gauss-Weil de leurs réductions  $T(\tilde{F}_0^{(n)}), T(\tilde{F}_1^{(n)})$  et  $T(\tilde{F}_2^{(n)})$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) modulo l'équation affine de  $E$ .

### a)-Estimations sur les degrés :

Le lemme suivant estime les degrés des polynômes  $A_n, B_n$  et  $C_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) et donne même les degrés exacts de ces derniers ainsi que la valeur du coefficient dominant de chacun lorsque  $g_2 \neq 0$ .

**Lemme 13.7** *Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  ;*

- $A_n$  est de degré  $\leq 2(n - 2[\frac{n}{3}] - 2)$  et le coefficient de  $Y^{2(n - 2[\frac{n}{3}] - 2)}$  dans son écriture canonique vaut  $\binom{[\frac{n}{3}]}{2 + 3[\frac{n}{3}] - n} \cdot (\frac{1}{4})^{[\frac{n}{3}]} \cdot g_2^{2 + 3[\frac{n}{3}] - n}$
- $B_n$  est de degré  $\leq 2(n - 2[\frac{n+1}{3}] - 1)$  et le coefficient de  $Y^{2(n - 2[\frac{n+1}{3}] - 1)}$  dans son écriture canonique vaut  $\binom{[\frac{n+1}{3}]}{1 + 3[\frac{n+1}{3}] - n} \cdot (\frac{1}{4})^{[\frac{n+1}{3}]} \cdot g_2^{1 + 3[\frac{n+1}{3}] - n}$
- $C_n$  est de degré  $\leq 2(n - 2[\frac{n-1}{3}] - 2)$  et le coefficient de  $Y^{2(n - 2[\frac{n-1}{3}] - 2)}$  dans son écriture canonique vaut  $\binom{[\frac{n-1}{3}]}{3 + 3[\frac{n-1}{3}] - n} \cdot (\frac{1}{4})^{[\frac{n-1}{3}] + 1} \cdot g_2^{3 + 3[\frac{n-1}{3}] - n}$ .

**Démonstration.**— Pour obtenir les estimations concernant les  $A_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), on procède par récurrence en utilisant la relation :  $A_{n+3} = \frac{1}{4}g_2A_{n+1} + \frac{1}{4}(Y^2 + g_3)A_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) de (13.7) et cette récurrence se fait en distinguant les trois cas :  $n = 3k$ ,  $n = 3k+1$  et  $n = 3k+2$  ( $k \in \mathbb{N}$ ). Les estimations concernant les  $B_n$  et les  $C_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) peuvent se déduire ensuite directement de celles des  $A_n$  -sans refaire la récurrence- grâce aux deux relations :  $B_n = A_{n+1}$  et  $C_n = \frac{1}{4}(Y^2 + g_3)A_{n-1}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) de (13.6). ■

Le lemme qui suit est une conséquence du lemme 13.7 précédent, il donne le degré total et le degré en  $Y$  d'une réduction  $T(P)$  d'un polynôme  $P \in K[X]$  modulo l'équation affine de  $E$  et donne aussi un monôme significatif de l'écriture canonique de  $T(P)$ .

**Lemme 13.8** *Pour tout polynôme  $P$  de  $K[X]$  de degré  $n \in \mathbb{N}$  et de coefficient dominant  $a_n \in K^*$ , sa réduction  $T(P)$  modulo l'équation affine de  $E$  vérifie :*

$$d_{\text{tot}}^\circ T(P) = n - [\frac{n}{3}] , \quad d_Y^\circ T(P) = 2[\frac{n}{3}]$$

et  $T(P)$  contient dans son écriture canonique le monôme

$$a_n \left(\frac{1}{4}\right)^{[\frac{n}{3}]} X^{n-3[\frac{n}{3}]} Y^{2[\frac{n}{3}]}.$$

**Démonstration.**— En utilisant le lemme 13.7 et en distinguant les trois cas :  $n = 3k$ ,  $n = 3k+1$  et  $n = 3k+2$  on montre qu'on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$d_{\text{tot}}^\circ T_n \leq n - [\frac{n}{3}] , \quad d_Y^\circ T_n \leq 2[\frac{n}{3}]$$

et que  $T_n$  contient dans son écriture canonique le monôme :

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{[\frac{n}{3}]} X^{n-3[\frac{n}{3}]} Y^{2[\frac{n}{3}]}.$$

Une remarque, utile pour la suite de cette démonstration, qu'on peut tirer immédiatement de ce qui précède est que pour tout couple  $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$ ,  $(k < \ell)$ , le coefficient de  $X^{\ell-3[\frac{\ell}{3}]}Y^{2[\frac{\ell}{3}]}$  dans l'écriture canonique de  $T_k$  est nul. En effet si ce coefficient était non nul, on aurait :

$$d_{\text{tot}}^\circ T_k \geq \ell - [\frac{\ell}{3}] \quad \text{et} \quad d_Y^\circ T_k \geq 2[\frac{\ell}{3}],$$

c'est-à-dire :

$$k - [\frac{k}{3}] \geq \ell - [\frac{\ell}{3}] \quad \text{et} \quad 2[\frac{k}{3}] \geq 2[\frac{\ell}{3}]$$

ce qui est clairement impossible puisque  $k < \ell$ . Donc ce coefficient est effectivement nul. En écrivant maintenant  $P(X) =: \sum_{i=0}^n a_i X^i$  ( $a_n \neq 0$ ), on a :

$$T(P) = \sum_{i=0}^n a_i T(X^i) = \sum_{i=0}^n a_i T_i$$

$$\begin{aligned} \text{d'où :} \quad d_{\text{tot}}^\circ T(P) &\leq \max(d_{\text{tot}}^\circ T_i, i=0, \dots, n) \leq n - [\frac{n}{3}], \\ d_Y^\circ T(P) &\leq \max(d_Y^\circ T_i, i=0, \dots, n) \leq 2[\frac{n}{3}] \end{aligned}$$

et, de plus, d'après la remarque précédente  $T(P)$  contient dans son écriture canonique le monôme  $a_n (\frac{1}{4})^{[\frac{n}{3}]} X^{n-3[\frac{n}{3}]} Y^{2[\frac{n}{3}]}$ , donc on a bien  $d_{\text{tot}}^\circ T(P) = n - [\frac{n}{3}]$  et  $d_Y^\circ T(P) = 2[\frac{n}{3}]$  ce qui achève cette démonstration. ■

Nous passons enfin, dans le corollaire qui suit, à l'estimation du degré total et du degré partiel en  $Y$  des réductions respectives  $T(\tilde{F}_0^{(n)})$ ,  $T(\tilde{F}_1^{(n)})$  et  $T(\tilde{F}_2^{(n)})$  des polynômes  $\tilde{F}_0^{(n)}$ ,  $\tilde{F}_1^{(n)}$  et  $\tilde{F}_2^{(n)}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) modulo l'équation affine de  $E$ , en donnant en même temps un monôme significatif l'écriture canonique de  $T(\tilde{F}_1^{(n)})$ .

**Corollaire 13.9** *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , les polynômes réduits  $T(\tilde{F}_0^{(n)})$ ,  $T(\tilde{F}_1^{(n)})$  et  $T(\tilde{F}_2^{(n)})$  des polynômes  $\tilde{F}_0^{(n)}$ ,  $\tilde{F}_1^{(n)}$  et  $\tilde{F}_2^{(n)}$  respectivement, modulo l'équation affine de  $E$ , sont de degré total  $\leq n^2$  et de degré partiel en  $Y$  strictement inférieur à  $n^2$  pour  $T(\tilde{F}_0^{(n)})$  et  $T(\tilde{F}_2^{(n)})$  et égal à  $n^2$  pour  $T(\tilde{F}_1^{(n)})$ . De plus,  $T(\tilde{F}_1^{(n)})$  contient dans son écriture canonique le monôme  $(\frac{1}{2})^{n^2-1} Y^{n^2}$ .*

**Démonstration.** — On remplace dans les formules (13.4) de définition des polynômes  $\tilde{F}_0^{(n)}$ ,  $\tilde{F}_1^{(n)}$  et  $\tilde{F}_2^{(n)}$  -selon les cas  $n$  impair et  $n$  pair- les polynômes  $Q_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) de  $K[X, Y]$  par leurs expressions en fonction des polynômes  $P_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) de  $K[X]$ . Les degrés et les coefficients dominants de ces derniers étant connus, il suffit d'utiliser le lemme 13.8 pour avoir toutes les assertions du corollaire 13.9. ■

## b)-Estimations des hauteurs locales et de la hauteur de Gauss-Weil :

Les estimations arithmétiques des polynômes de  $K[Y]$  ou de  $K[X, Y]$ , utilisent dans le cas fini la hauteur  $v$ -adique  $H_v$  alors que dans le cas infini nous prenons la longueur  $v$ -adique  $L_v$ , qui est plus facile à gérer pour ce cas et qui entraîne une estimation pour  $H_v$  puisque on a :  $H_v \leq L_v$ . Le lemme suivant donne des estimations pour les hauteurs  $v$ -adique (resp longueurs  $v$ -adique) des polynômes  $A_n$ ,  $B_n$  et  $C_n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) en fonction de  $M_v$  et de  $n$  quand  $v$  est une place finie (resp infinie).



**Lemme 13.10** Soit  $v$  une place de  $K$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a :

- quand  $v$  est infinie :

$$L_v(A_n) \leq M_v^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor}$$

$$\text{et } \max(L_v(B_n), L_v(C_n)) \leq M_v^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor},$$

- quand  $v$  est finie et  $v \mid 2$  :

$$H_v(A_n) \leq 4M_v^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor}$$

$$\text{et } \max(H_v(B_n), H_v(C_n)) \leq 4M_v^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}$$

- et quand  $v$  est finie et  $v \nmid 2$  :

$$H_v(A_n) \leq M_v^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor}$$

$$\text{et } \max(H_v(B_n), H_v(C_n)) \leq M_v^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}.$$

**Démonstration.**— Les estimations des hauteurs  $v$ -adiques (resp des longueurs  $v$ -adiques) des polynômes  $A_n$  ( $n \geq 1$ ) de  $K[Y]$  quand  $v$  est finie (resp quand  $v$  est infinie) s'obtiennent par un procédé de récurrence sur  $n$  en utilisant la relation :  $A_{n+3} = \frac{1}{4}g_2A_{n+1} + \frac{1}{4}(Y^2 + g_3)A_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) donnée par (13.7). Ensuite, pour en déduire les estimations analogues concernant les polynômes  $B_n$  et  $C_n$  ( $n \geq 1$ ), il suffit d'utiliser les deux relations :  $B_n = A_{n+1}$  et  $C_n = \frac{1}{4}(Y^2 + g_3)A_{n-1}$  ( $n \geq 1$ ) données par (13.6) et lemme s'ensuit. ■

Comme conséquence du lemme 13.10, le lemme qui suit donne -lorsque  $P$  est un polynôme de  $K[Y]$  et  $v$  une place finie (resp infinie) de  $K$ - une estimation pour la hauteur  $v$ -adique (resp la longueur  $v$ -adique) de sa réduction  $T(P)$  modulo l'équation affine de  $E$ , en fonction de sa hauteur  $v$ -adique (resp de sa longueur  $v$ -adique), de son degré et de  $M_v$ .

**Lemme 13.11** Soit  $v$  une place de  $K$ , pour tout polynôme  $P$  de  $K[X]$  de degré  $n \geq 1$ , sa réduction  $T(P)$  modulo l'équation affine de  $E$  satisfait :

- quand  $v$  est infinie :

$$L_v(T(P)) \leq 3L_v(P)M_v^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor},$$

- quand  $v$  est finie et  $v \mid 2$  :

$$H_v(T(P)) \leq H_v(P)(4M_v)^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}$$

- et quand  $v$  est finie et  $v \nmid 2$  :

$$H_v(T(P)) \leq H_v(P)M_v^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}.$$

**Démonstration.**— Ecrivons :

$$P(X) =: \sum_{i=0}^n a_i X^i \quad (a_n \neq 0),$$

d'où

$$\begin{aligned}
T(P) &= \sum_{i=0}^n a_i T(X^i) \\
&= \sum_{i=0}^n a_i T_i \\
&= \sum_{i=0}^n a_i [A_i(Y)X^2 + B_i(Y)X + C_i(Y)]
\end{aligned}$$

et d'après les propriétés des longueurs et des hauteurs locales :

- quand  $v$  est infinie :

$$L_v(T(P)) \leq L_v(P) \cdot \max_{0 \leq i \leq n} (L_v(A_i) + L_v(B_i) + L_v(C_i))$$

- et quand  $v$  est finie :

$$H_v(T(P)) \leq H_v(P) \cdot \max_{0 \leq i \leq n} (\max\{H_v(A_i), H_v(B_i), H_v(C_i)\}).$$

Il ne reste qu'à appliquer le lemme 13.10 pour conclure. ■

Comme application du lemme 13.11, le lemme qui suit estime les hauteurs  $v$ -adiques (resp les longueurs  $v$ -adiques) des réductions  $T(\tilde{F}_0^{(n)}), T(\tilde{F}_1^{(n)})$  et  $T(\tilde{F}_2^{(n)})$  des polynômes  $\tilde{F}_0^{(n)}, \tilde{F}_1^{(n)}$  et  $\tilde{F}_2^{(n)}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), modulo l'équation affine de  $E$ , quand  $v$  est une place finie (resp infinie).

**Lemme 13.12** *Soit  $v$  une place de  $K$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on a :*

- quand  $v$  est infinie :

$$\begin{aligned}
&\max\left\{L_v\left(T(\tilde{F}_0^{(n)})\right), L_v\left(T(\tilde{F}_1^{(n)})\right), L_v\left(T(\tilde{F}_2^{(n)})\right)\right\} \\
&\leq \begin{cases} 3 \cdot (2M_v)^{\frac{3n^2-3}{2}} & \text{si } n \text{ est impair} \\ 6 \cdot (2M_v)^{\frac{3n^2-2}{2}} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases},
\end{aligned}$$

- quand  $v$  est finie et  $v \mid 2$  :

$$\begin{aligned}
&\max\left\{H_v\left(T(\tilde{F}_0^{(n)})\right), H_v\left(T(\tilde{F}_1^{(n)})\right), H_v\left(T(\tilde{F}_2^{(n)})\right)\right\} \\
&\leq \begin{cases} (4M_v)^{\frac{3n^2-3}{2}} & \text{si } n \text{ est impair} \\ (4M_v)^{\frac{3n^2-2}{2}} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}
\end{aligned}$$

- et quand  $v$  est finie et  $v \nmid 2$  :

$$\begin{aligned}
&\max\left\{H_v\left(T(\tilde{F}_0^{(n)})\right), H_v\left(T(\tilde{F}_1^{(n)})\right), H_v\left(T(\tilde{F}_2^{(n)})\right)\right\} \\
&\leq \begin{cases} M_v^{\frac{3n^2-3}{2}} & \text{si } n \text{ est impair} \\ M_v^{\frac{3n^2-2}{2}} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}.
\end{aligned}$$

**Démonstration.**— Pour  $n = 1, 2, 3$  on vérifie les estimations du lemme directement sur les formules de  $T(\tilde{F}_0^{(n)}), T(\tilde{F}_1^{(n)})$  et  $T(\tilde{F}_2^{(n)})$  (données à la fin de ce sous-chapitre) et pour  $n \geq 4$ , on remplace dans les formules de définition (13.4) des  $\tilde{F}_0^{(n)}, \tilde{F}_1^{(n)}$  et  $\tilde{F}_2^{(n)}$  -selon le cas  $n$  impair ou  $n$  pair- les polynômes  $Q_m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) de  $K[X, Y]$  par leurs expressions en fonction des polynômes  $P_m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ). Les hauteurs

$v$ -adiques (resp longueurs  $v$ -adiques) des  $P_m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) étant estimées dans le corollaire 13.5 quand  $v$  est une place finie (resp infinie), les degrés des  $P_m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) étant aussi connus, l'application du lemme 13.11 permet alors de conclure. ■

Enfin étant donné un entier  $n \geq 1$ , nous tirons du lemme 13.12 une estimation pour la hauteur de Gauss-Weil de la famille des polynômes  $T(\tilde{F}_0^{(n)}), T(\tilde{F}_1^{(n)})$  et  $T(\tilde{F}_2^{(n)})$  réduits des polynômes  $\tilde{F}_0^{(n)}, \tilde{F}_1^{(n)}$  et  $\tilde{F}_2^{(n)}$  respectivement, modulo l'équation affine de  $E$ . Cette estimation dépend de  $n$  et de  $\eta$ .

**Corollaire 13.13** *Pour tout entier  $n \geq 1$  on a :*

$$\tilde{h}\left(T(\tilde{F}_0^{(n)}), T(\tilde{F}_1^{(n)}), T(\tilde{F}_2^{(n)})\right) \leq \frac{3}{2}(\eta + 3)n^2.$$

**Démonstration.**— Il suffit d'utiliser la définition de la hauteur de Gauss-Weil d'une famille finie de polynômes :

$$\begin{aligned} & \tilde{h}\left(T(\tilde{F}_0^{(n)}), T(\tilde{F}_1^{(n)}), T(\tilde{F}_2^{(n)})\right) \\ &:= \sum_{v \in M_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \cdot \log \max \left\{ H_v\left(T(\tilde{F}_0^{(n)})\right), H_v\left(T(\tilde{F}_1^{(n)})\right), H_v\left(T(\tilde{F}_2^{(n)})\right) \right\}, \end{aligned}$$

de majorer dans le cas  $v$  infinie  $H_v$  par  $L_v$  et d'utiliser les estimation du lemme 13.12 en remarquant qu'on a :  $\sum_{v \in M_K^\infty} [K_v : \mathbb{Q}_v] = \sum_{v|2} [K_v : \mathbb{Q}_v] = [K : \mathbb{Q}]$  et

$$\begin{aligned} & \sum_{v \in M_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \cdot \log M_v \\ &= \eta. \text{ Nous avons ainsi :} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{h}\left(T(\tilde{F}_0^{(n)}), T(\tilde{F}_1^{(n)}), T(\tilde{F}_2^{(n)})\right) &\leq \begin{cases} \frac{3n^2-3}{2}(\eta + \log 8) + \log 3 & \text{si } n \text{ est impair} \\ \frac{3n^2-2}{2}(\eta + \log 8) + \log 6 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases} \\ &\leq \frac{3}{2}(\eta + 3)n^2 \quad (\forall n \geq 1). \end{aligned}$$

Ceci démontre l'estimation du corollaire. ■

**Démonstration du théorème 13.3 :**

Soit  $n$  un entier  $\geq 1$ , les polynômes de  $K[X, Y] : T(\tilde{F}_0^{(n)}), T(\tilde{F}_1^{(n)})$  et  $T(\tilde{F}_2^{(n)})$  réduits des polynômes  $\tilde{F}_0^{(n)}, \tilde{F}_1^{(n)}$  et  $\tilde{F}_2^{(n)}$  respectivement, modulo l'équation affine de  $E$ , sont -d'après le corollaire 13.9- de degré total  $\leq n^2$ . Prenons respectivement pour  $F_0^{(n)}, F_1^{(n)}$  et  $F_2^{(n)}$  leurs homogénéisés en des formes de  $K[X, Y, Z]$  de degré  $n^2$ , c'est-à-dire posons :

$$\begin{aligned} F_0^{(n)}(X, Y, Z) &:= Z^{n^2} \cdot T(\tilde{F}_0^{(n)})\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right), \\ F_1^{(n)}(X, Y, Z) &:= Z^{n^2} \cdot T(\tilde{F}_1^{(n)})\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) \\ \text{et } F_2^{(n)}(X, Y, Z) &:= Z^{n^2} \cdot T(\tilde{F}_2^{(n)})\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right). \end{aligned}$$

Posons aussi  $\underline{F}^{(n)} := (F_0^{(n)}, F_1^{(n)}, F_2^{(n)})$  la famille constituée de ces formes, il est clair que  $\underline{F}^{(n)}$  est une famille de formes de  $K[X, Y, Z]$  de degré  $n^2$  chacune et pour tout point  $\mathbf{p} := (x : y : z)$  de  $E \hookrightarrow \mathbb{P}_2$ , le point  $(F_0^{(n)}(x, y, z) : F_1^{(n)}(x, y, z) : F_2^{(n)}(x, y, z))$

représente dans  $\mathbb{P}_2$  le point  $n.\mathbf{p}$  de  $E$  sauf peut être quand  $\mathbf{p}$  est le point à l'infini de  $E$ . Ceci résulte du lemme 13.6 et du fait que les polynômes  $T(\tilde{F}_0^{(n)}), T(\tilde{F}_1^{(n)})$  et  $T(\tilde{F}_2^{(n)})$  sont équivalents modulo l'équation affine de  $E$ , aux polynômes  $\tilde{F}_0^{(n)}, \tilde{F}_1^{(n)}$  et  $\tilde{F}_2^{(n)}$  respectivement. Montrons maintenant que même lorsque  $\mathbf{p} := (x : y : z)$  est le point à l'infini  $\underline{0} := (0 : 1 : 0)$  de  $E$ , le point projectif  $(F_0^{(n)}(x, y, z) : F_1^{(n)}(x, y, z) : F_2^{(n)}(x, y, z))$  est bien défini et représente toujours dans  $\mathbb{P}_2$  le point  $n.\mathbf{p}$  de  $E$ .

Comme  $n.\mathbf{0} = \mathbf{0}$ , cela revient simplement à montrer qu'on a :  $F_0^{(n)}(0, 1, 0) = F_2^{(n)}(0, 1, 0) = 0$  et  $F_1^{(n)}(0, 1, 0) \neq 0$ , or ceci résulte immédiatement du corollaire 13.9. En effet d'après ce dernier les deux polynômes  $T(\tilde{F}_0^{(n)})$  et  $T(\tilde{F}_2^{(n)})$  sont de degré total  $\leq n^2$  et de degré partiel en  $Y$  strictement inférieur à  $n^2$ . Donc leurs homogénéisés  $F_0^{(n)}$  et  $F_2^{(n)}$  ne contiennent -dans leurs écritures canoniques- que des monômes de  $K[X, Y, Z]$  dont l'un au moins des degrés en  $X$  ou en  $Z$  est non nul, ce qui entraîne qu'on a bien :  $F_0^{(n)}(0, 1, 0) = F_2^{(n)}(0, 1, 0) = 0$ . Quant à  $T(\tilde{F}_1^{(n)})$ , il est de degré total égal à son degré partiel en  $Y$  et égal à  $n^2$ , de plus il contient -dans son écriture canonique- le monôme  $(\frac{1}{2})^{n^2-1}Y^{n^2}$ , par conséquent son homogénéisé  $F_1^{(n)}$  ne contient -dans son écriture canonique- que le monôme  $(\frac{1}{2})^{n^2-1}Y^{n^2}$  et d'autre monômes de  $K[X, Y, Z]$  dont l'un au moins des degrés en  $X$  ou en  $Z$  est non nul, ce qui montre bien qu'on a :  $F_1^{(n)}(0, 1, 0) = (\frac{1}{2})^{n^2-1} \neq 0$ , d'où :  $(F_0^{(n)}(\underline{0}) : F_1^{(n)}(\underline{0}) : F_2^{(n)}(\underline{0})) = (0 : 1 : 0) = \underline{0}$ . On vient de montrer que la famille de formes  $\underline{F}^{(n)} = (F_0^{(n)}, F_1^{(n)}, F_2^{(n)})$  représente globalement la multiplication par  $n$  d'un point de  $E \hookrightarrow \mathbb{P}_2$ . Par ailleurs, la hauteur de Gauss-Weil de la famille de formes  $\underline{F}^{(n)}$  est évidemment la même que celle des déshomogénéisés  $T(\tilde{F}_0^{(n)}), T(\tilde{F}_1^{(n)})$  et  $T(\tilde{F}_2^{(n)})$  qu'on a majoré avant dans le corollaire 13.13 par  $\frac{3}{2}(\eta + 3)n^2$ . Ceci conclut la démonstration du théorème.

Avant de conclure ce sous-chapitre, donnons explicitement les formes constituant les deux familles  $\underline{F}^{(2)}$  et  $\underline{F}^{(3)}$ ; cela nous donne ainsi des formules de duplication et de triplcation sur  $E$ . Pour aboutir à ces formules on a besoin seulement des polynômes  $Q_i$  ( $i = 0, 1, \dots, 4$ ) qui sont donnés tout au début de ce sous-chapitre et du polynôme  $Q_5$  qui est égal à  $Q_4Q_2^3 - Q_1Q_3^3$  d'après les relations (13.2). Grâce au formules de définition (13.4), on calcule les polynômes de  $K[X, Y] : \tilde{F}_0^{(n)}, \tilde{F}_1^{(n)}$  et  $\tilde{F}_2^{(n)}$  pour  $n = 2$  et  $n = 3$ , on les réduit ensuite modulo l'équation affine de  $E$  par l'application de la réduction  $T$  définie à la page 83 et on homogénéise enfin les polynômes réduits obtenus  $T(\tilde{F}_0^{(n)}), T(\tilde{F}_1^{(n)})$  et  $T(\tilde{F}_2^{(n)})$  pour  $n = 2$  et  $n = 3$ . Voilà ce qu'on obtient en faisant tout ces calculs :

• **Formules de duplication sur  $E$  :**

On peut représenter globalement la duplication sur  $E$  par les formes suivantes :

$$\begin{aligned} F_0^{(2)}(X, Y, Z) &:= \frac{1}{4}XY^3 + \frac{3}{4}g_2X^2YZ + \frac{9}{4}g_3XYZ^2 + \frac{1}{16}g_2^2YZ^3 \\ F_1^{(2)}(X, Y, Z) &:= \frac{1}{8}Y^4 - \frac{3}{8}g_2XY^2Z - \frac{9}{4}g_3Y^2Z^2 - \frac{9}{8}g_2^2X^2Z^2 \\ &\quad - \frac{27}{8}g_2g_3XZ^3 - \frac{27}{8}g_3^2Z^4 + \frac{1}{32}g_2^3Z^4 \\ F_2^{(2)}(X, Y, Z) &:= Y^3Z. \end{aligned}$$

• Formules de triplication sur  $E$  :

On peut représenter globalement la triplication sur  $E$  par les formes suivantes :

$$\begin{aligned}
F_0^{(3)}(X, Y, Z) &:= \frac{3}{256}XY^8 + \frac{21}{128}g_2X^2Y^6Z + \frac{9}{8}g_3XY^6Z^2 + \frac{125}{1024}g_2^2Y^6Z^3 \\
&+ \frac{81}{128}g_2g_3X^2Y^4Z^3 - \left(\frac{3}{256}g_2^3 + \frac{81}{128}g_3^2\right)XY^4Z^4 \\
&- \frac{837}{1024}g_2^2g_3Y^4Z^5 - \left(\frac{147}{1024}g_2^4 + \frac{1053}{128}g_2g_3^2\right)X^2Y^2Z^5 \\
&- \left(\frac{45}{32}g_2^3g_3 + \frac{243}{32}g_3^3\right)XY^2Z^6 - \frac{27}{64}g_2^3X^7Z^2 \\
&- \left(\frac{405}{256}g_2^3g_3^2 + \frac{37}{4096}g_2^6 + \frac{729}{256}g_3^4\right)XZ^8 - \left(\frac{729}{128}g_2g_3^3\right. \\
&+ \left.\frac{459}{1024}g_3g_2^4\right)X^2Z^7 - \left(\frac{7}{1024}g_2^5 + \frac{2241}{1024}g_2^2g_3^2\right)Y^2Z^7 \\
&- \left(\frac{1215}{1024}g_2^2g_3^3 + \frac{9}{1024}g_2^5g_3\right)Z^9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_1^{(3)}(X, Y, Z) &:= \frac{1}{256}Y^9 - \frac{9}{128}g_2XY^7Z - \frac{27}{32}g_3Y^7Z^2 - \frac{225}{256}g_2^2X^2Y^5Z^2 \\
&- \frac{621}{128}g_2g_3XY^5Z^3 - \left(\frac{75}{256}g_2^3 + \frac{1215}{128}g_3^2\right)Y^5Z^4 \\
&- \frac{1215}{128}g_2^2g_3X^2Y^3Z^4 - \left(\frac{579}{1024}g_2^4 + \frac{2511}{128}g_2g_3^2\right)XY^3Z^5 \\
&- \left(\frac{423}{256}g_2^3g_3 + \frac{243}{16}g_3^3\right)Y^3Z^6 - \left(\frac{3645}{256}g_2^2g_3^2\right. \\
&- \left.\frac{189}{1024}g_2^5\right)X^2YZ^6 - \left(\frac{1539}{1024}g_2^4g_3 + \frac{2187}{128}g_2g_3^3\right)XYZ^7 \\
&- \left(\frac{3}{4096}g_2^6 + \frac{2187}{256}g_3^4 + \frac{81}{64}g_2^3g_3^2\right)YZ^8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2^{(3)}(X, Y, Z) &:= \frac{27}{256}Y^8Z - \frac{27}{128}g_2XY^6Z^2 - \frac{27}{32}g_3Y^6Z^3 - \frac{27}{256}g_2^2X^2Y^4Z^3 \\
&+ \frac{81}{128}g_2g_3XY^4Z^4 + \left(\frac{243}{128}g_3^2 + \frac{27}{256}g_2^3\right)Y^4Z^5 \\
&+ \frac{243}{128}g_2^2g_3X^2Y^2Z^5 + \left(\frac{63}{1024}g_2^4 + \frac{243}{128}g_2g_3^2\right)XY^2Z^6 \\
&- \frac{81}{256}g_2^3g_3Y^2Z^7 - \left(\frac{1215}{256}g_2^2g_3^2 + \frac{63}{1024}g_2^5\right)X^2Z^7 \\
&- \left(\frac{729}{128}g_2g_3^3 + \frac{513}{1024}g_2^4g_3\right)XZ^8 - \left(\frac{1}{4096}g_2^6\right. \\
&+ \left.\frac{27}{64}g_2^3g_3^2 + \frac{729}{256}g_3^4\right)Z^9.
\end{aligned}$$

### 13.3 Une valeur admissible pour la constante de comparaison entre hauteur projective et hauteur de Néron-Tate sur $E$ :

Pour tout point  $\mathbf{p} \in E(K)$ , désignons par  $h(\mathbf{p})$  la hauteur logarithmique absolue de  $\mathbf{p}$  (voir §2) et par  $\widehat{h}(\mathbf{p})$  la hauteur normalisée (ou de Néron-Tate) de  $\mathbf{p}$  qui est définie par :

$$\widehat{h}(\mathbf{p}) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{h(n \cdot \mathbf{p})}{n^2}.$$

On a le théorème suivant :

**Théorème 13.14** *Pour tout point  $\mathbf{p} \in E(K)$  on a :*

$$-\frac{3}{4}\eta - 5 \leq h(\mathbf{p}) - \widehat{h}(\mathbf{p}) \leq \frac{3}{2}\eta + 8.$$

**Démonstration.**— C'est une conséquence immédiate du lemme 3.4 de [Da1]. En effet, on majore simplement la constante  $h := \max\{1, h(1 : g_2 : g_3)\}$  introduite dans cette référence par  $h(1 : g_2 : g_3) + 1$ , puis on majore les constantes numériques  $5 \log 2 + \frac{3}{4}$  et  $8 \log 2 + \frac{3}{2}$  par 5 et 8 respectivement et le théorème 13.14 en découle. ■

## 14 Appendice

Dans ce paragraphe nous démontrons les quelques lemmes élémentaires utilisés depuis le §7.

**Lemme 14.1 (G. Rémond)** *Soient  $c_1$  un réel  $> 1$  et  $r$  un entier  $\geq 1$ . L'espace euclidien  $\mathbb{R}^r$  peut être recouvert par un nombre  $\leq [(1 + \sqrt{8c_1})^r]$  de cônes de sommet 0 et d'angle  $\arccos(1 - \frac{1}{c_1})$  chacun.*

**Démonstration.**— Durant toute cette démonstration, quand  $x$  et  $y$  sont deux points de  $\mathbb{R}^r$ , on note  $(x, y)$  le réel appartenant à l'intervalle  $]-\pi, \pi]$  représentant l'angle  $(\vec{0x}, \vec{0y})$  en radians. Comme tout point de  $\mathbb{R}^r$  s'obtient par une homothétie de centre 0 d'un point de la sphère unité  $S := S(0, 1)$  alors : recouvrir l'espace euclidien  $\mathbb{R}^r$  par des cônes de sommet 0 et d'angle  $\arccos(1 - \frac{1}{c_1})$  revient à recouvrir  $S$  par de tels (mêmes) cônes. Pour faire cela en ayant une estimation du nombre de cônes du recouvrement, on se base sur le fait suivant : «  $\forall x \in S$  et  $\forall \varphi \in ]0, \frac{\pi}{4}[$  le sous-ensemble  $B(x, 2 \sin \varphi) \cap S$  de  $\mathbb{R}^r$  est contenu dans un certain cône de centre 0 et d'angle  $4\varphi$  ». Montrons d'abord ce fait : soient  $y_1$  et  $y_2$  deux points quelconques de  $B(x, 2 \sin \varphi) \cap S$ , on a d'une part :

$$\begin{aligned} |y_i - x|^2 &= |y_i|^2 + |x|^2 - 2|y_i| \cdot |x| \cdot \cos(x, y_i) \\ &= 2 - 2 \cos(x, y_i) \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$|y_i - x| \leq 2 \sin \varphi \Rightarrow |y_i - x|^2 \leq 4 \sin^2 \varphi \quad i = 1, 2$$

d'où on déduit :

$$\begin{array}{ll} 2 - 2 \cos(x, y_i) \leq 4 \sin^2 \varphi & i = 1, 2 \\ \text{i.e} \quad \cos(x, y_i) \geq 1 - 2 \sin^2 \varphi = \cos 2\varphi & i = 1, 2 \\ \text{d'où} \quad |(x, y_i)| \leq 2\varphi & i = 1, 2. \end{array}$$

Ainsi

$$|(y_1, y_2)| \leq |(x, y_1)| + |(x, y_2)| \leq 2\varphi + 2\varphi = 4\varphi,$$

or ceci est vrai pour tout couple de points  $(y_1, y_2) \in (B(x, 2\sin\varphi) \cap S)^2$  ce qui montre qu'effectivement le sous-ensemble  $B(x, 2\sin\varphi) \cap S$  de  $\mathbb{R}^r$  est contenu dans un certain cône de centre 0 et d'angle  $4\varphi$ .

Posons maintenant  $\varphi := \frac{1}{4} \arccos(1 - \frac{1}{c_1})$ , d'après le fait ci-dessus le problème revient à recouvrir la sphère unité  $S$  par un nombre fini de boules ouvertes de rayon  $2\sin\varphi$  chacune et dont les centres appartiennent à  $S$ , en ayant une estimation du nombre de boules de ce recouvrement (qui est aussi le nombre de cônes du recouvrement déduit par le fait précédent). Mais, il suffit d'appliquer le lemme ?? pour  $S$  avec  $\rho$  remplacé par 1 et  $\gamma$  par  $\frac{1}{2\sin\varphi}$ ; ce qui montre que  $S$  peut être recouverte par un nombre  $\leq [(\frac{1}{\sin\varphi} + 1)^r]$  de petites boules de rayon  $2\sin\varphi$  chacune et dont les centres ont dans  $S$ . Par conséquent, en remontant le raisonnement,  $\mathbb{R}^r$  est recouvert par un nombre  $\leq [(\frac{1}{\sin\varphi} + 1)^r]$  de cônes de sommet 0 et d'angle  $4\varphi = \arccos(1 - \frac{1}{c_1})$  chacun. Il nous reste à vérifier que  $\frac{1}{\sin\varphi} + 1 \leq 1 + \sqrt{8c_1}$ . On a par définition de  $\varphi$  :

$$1 - \frac{1}{c_1} = \cos 4\varphi = 2\cos^2 2\varphi - 1 = 2(1 - 2\sin^2\varphi)^2 - 1$$

d'où on tire :

$$\begin{aligned} \sin\varphi &= \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{2c_1}} \right)} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{c_1} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{2c_1}}}} \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{8c_1}} \end{aligned}$$

d'où  $\frac{1}{\sin\varphi} + 1 \leq 1 + \sqrt{8c_1}$  ce qui achève la preuve. ■

**Lemme 14.2** Soient  $X_1, X_2, Y_1$  et  $Y_2$  des réels strictement positifs,  $(a, b)$  un couple de réels positifs différent de  $(0, 0)$  et  $k$  un réel  $> 1$ . Supposons qu'on ait :

$$-a \leq Y_i - X_i \leq b \quad \text{pour } i = 1, 2.$$

Alors, la double inégalité :

$$\frac{1}{k} \frac{Y_1}{Y_2} \leq \frac{X_1}{X_2} \leq k \frac{Y_1}{Y_2}$$

est satisfaite dès que :

$$X_i \geq \frac{ak + b}{k - 1} \quad \text{pour } i = 1, 2$$

ou dès que :

$$Y_i \geq \frac{bk + a}{k - 1} \quad \text{pour } i = 1, 2.$$

**Démonstration.**— • Supposons qu'on a :  $X_i \geq \frac{ak+b}{k-1} > a$  pour  $i = 1, 2$ . Des inégalités :

$$-a \leq Y_i - X_i \leq b \quad (i = 1, 2)$$

vient : 
$$\frac{X_1 - a}{X_2 + b} \leq \frac{Y_1}{Y_2} \leq \frac{X_1 + b}{X_2 - a}.$$

Comme on a :

$$\begin{aligned} \frac{X_1 + b}{X_2 - a} \leq k \frac{X_1}{X_2} &\iff \left(X_1 - \frac{b}{k-1}\right) \left(X_2 - \frac{ka}{k-1}\right) \geq \frac{abk}{(k-1)^2}, \\ \frac{X_1 - a}{X_2 + b} \geq \frac{1}{k} \frac{X_1}{X_2} &\iff \left(X_1 - \frac{ak}{k-1}\right) \left(X_2 - \frac{b}{k-1}\right) \geq \frac{abk}{(k-1)^2} \end{aligned}$$

et que les deux inégalités de droite sont satisfaites, puisqu'on a supposé que  $X_i \geq \frac{ak+b}{k-1}$  pour  $i = 1, 2$ , on a bien :

$$\frac{X_1 + b}{X_2 - a} \leq k \frac{X_1}{X_2} \quad \text{et} \quad \frac{X_1 - a}{X_2 + b} \geq \frac{1}{k} \frac{X_1}{X_2}$$

d'où : 
$$\frac{1}{k} \frac{X_1}{X_2} \leq \frac{X_1 - a}{X_2 + b} \leq \frac{Y_1}{Y_2} \leq \frac{X_1 + b}{X_2 - a} \leq k \frac{X_1}{X_2}$$

puis : 
$$\frac{1}{k} \frac{Y_1}{Y_2} \leq \frac{X_1}{X_2} \leq k \frac{Y_1}{Y_2}.$$

ce qui démontre le premier cas du lemme 14.2.

• Le deuxième cas du lemme 14.2 suit simplement du premier cas en permutant  $X_1$  avec  $Y_1$ ,  $X_2$  avec  $Y_2$  et  $a$  avec  $b$ . La démonstration est achevée. ■

**Lemme 14.3** *Soit  $E$  une courbe elliptique plongée dans  $\mathbb{P}_2$  à la Weierstrass, définie sur un corps de nombres  $K$ , d'équation projective :*

*$Y^2Z = 4X^3 - g_2XZ^2 - g_3Z^3$  ( $g_2, g_3 \in K$ ) et soit  $m \geq 2$  un entier positif,  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$  des points de  $E$  satisfaisant les hypothèses  $H_1$  du §7. Posons pour  $i = 1, \dots, m$  :*

$$a_i := \left\lceil \frac{|\mathbf{x}_m|}{|\mathbf{x}_i|} \right\rceil.$$

Alors, pour tout  $i, j$  dans  $\{1, \dots, m\}$ , on a :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} a_j^2 \widehat{h}(\mathbf{x}_j) \leq a_i^2 \widehat{h}(\mathbf{x}_i) \leq \sqrt{2} a_j^2 \widehat{h}(\mathbf{x}_j), \quad (14.1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{h(\mathbf{x}_i)}{h(\mathbf{x}_j)} \leq \frac{\widehat{h}(\mathbf{x}_i)}{\widehat{h}(\mathbf{x}_j)} \leq \sqrt{2} \frac{h(\mathbf{x}_i)}{h(\mathbf{x}_j)}, \quad (14.2)$$

$$\frac{1}{2} a_j^2 h(\mathbf{x}_j) \leq a_i^2 h(\mathbf{x}_i) \leq 2 a_j^2 h(\mathbf{x}_j). \quad (14.3)$$

**Démonstration.**— Remarquons d'abord que les trois doubles inégalités (14.1), (14.2) et (14.3) sont symétriques par rapport à  $i$  et  $j$  et qu'elles sont triviales lorsque  $i = j$ . Donc, on peut supposer -sans restreindre la généralité- qu'on a  $1 \leq i < j \leq m$ . En tenant compte de cette hypothèse, commençons par démontrer la double inégalité (14.1). Pour cela on distingue les deux cas suivants :

• **1<sup>er</sup> cas** : (si  $j = m$ ) Dans ce premier cas, on applique le lemme 14.2 avec :  $X_1 = a_i$ ,  $X_2 = Y_1 = Y_2 = \frac{|\mathbf{x}_m|}{|\mathbf{x}_i|}$ ,  $a = 0$ ,  $b = 1$  et  $k = \sqrt[4]{2}$ . Les hypothèses du lemme 14.2 sont clairement vérifiées, par conséquent -d'après le deuxième cas de ce dernier- on a :

$$\frac{1}{\sqrt[4]{2}} \leq a_i \frac{|\mathbf{x}_i|}{|\mathbf{x}_m|} \leq \sqrt[4]{2} \quad (14.4)$$

dès que :

$$\frac{|\mathbf{x}_m|}{|\mathbf{x}_i|} \geq \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2} - 1} = 6, 29 \dots$$



Or, cette dernière inégalité est bien vérifiée puisqu'on a, d'après les hypothèses  $H_1$  :

$$\frac{|\mathbf{x}_m|}{|\mathbf{x}_i|} \geq \frac{|\mathbf{x}_m|}{|\mathbf{x}_{m-1}|} \geq 7 \quad (\text{car } i \leq j-1 \leq m-1).$$

Donc, la double inégalité (14.4) est établie (pour ce premier cas). Il suffit d'en prendre les carrés des trois termes et de remarquer que  $a_j = a_m = 1$  pour en déduire la double inégalité (14.1) dans ce premier cas.

• **2<sup>ème</sup> cas** : (si  $j \leq m-1$ ) Dans ce deuxième cas, on applique le lemme 14.2 avec :  $X_1 = a_i$ ,  $X_2 = a_j$ ,  $Y_1 = \frac{|\mathbf{x}_m|}{|\mathbf{x}_i|}$ ,  $Y_2 = \frac{|\mathbf{x}_m|}{|\mathbf{x}_j|}$ ,  $a = 0$ ,  $b = 1$  et  $k = \sqrt[4]{2}$ . Les hypothèses du lemme 14.2 se vérifient très facilement, par conséquent -d'après le deuxième cas de ce dernier- on a :

$$\frac{1}{\sqrt[4]{2}} \frac{|\mathbf{x}_j|}{|\mathbf{x}_i|} \leq \frac{a_i}{a_j} \leq \sqrt[4]{2} \frac{|\mathbf{x}_j|}{|\mathbf{x}_i|} \quad (14.5)$$

dès que :

$$\min\left(\frac{|\mathbf{x}_m|}{|\mathbf{x}_i|}, \frac{|\mathbf{x}_m|}{|\mathbf{x}_j|}\right) \geq \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2}-1},$$

c'est-à-dire dès que :

$$\frac{|\mathbf{x}_m|}{|\mathbf{x}_j|} \geq \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2}-1} = 6,29\dots$$

Or, cette dernière est bien vérifiée puisqu'on a, d'après les hypothèses  $H_1$  :

$$\frac{|\mathbf{x}_m|}{|\mathbf{x}_j|} \geq \frac{|\mathbf{x}_m|}{|\mathbf{x}_{m-1}|} \geq 7 \quad (\text{car } j \leq m-1).$$

Donc, la double inégalité (14.5) est établie (pour ce deuxième cas). Il ne reste qu'à prendre les carrés des trois termes de cette dernière pour aboutir à la double inégalité (14.1) dans ce deuxième cas. En conclusion la double inégalité (14.1) est vraie pour tout  $i, j$  dans  $\{1, \dots, m\}$ .

Montrons maintenant la double inégalité (14.2). Pour cela on applique le lemme 14.2 avec :  $X_1 = \widehat{h}(\mathbf{x}_i)$ ,  $X_2 = \widehat{h}(\mathbf{x}_j)$ ,  $Y_1 = h(\mathbf{x}_i)$ ,  $Y_2 = h(\mathbf{x}_j)$ ,  $a = \frac{3}{4}\eta + 5$ ,  $b = \frac{3}{2}\eta + 8$  et  $k = \sqrt{2}$ . Le théorème 13.14 montre ainsi que les hypothèses du lemme 14.2 sont bien vérifiées, donc d'après le premier cas de ce dernier, la double inégalité (14.2) est satisfaite dès que :

$$\min\left(\widehat{h}(\mathbf{x}_i), \widehat{h}(\mathbf{x}_j)\right) \geq \frac{(\frac{3}{4}\eta + 5)\sqrt{2} + \frac{3}{2}\eta + 8}{\sqrt{2}-1},$$

c'est-à-dire dès que :

$$\widehat{h}(\mathbf{x}_i) \geq \left(3 + \frac{9}{4}\sqrt{2}\right)\eta + 18 + 13\sqrt{2} = 6,18\dots\eta + 36,38\dots$$

Or, cette dernière est bien satisfaite puisque, d'après les hypothèses  $H_1$ , on a même :  $\widehat{h}(\mathbf{x}_i) \geq \widehat{h}(\mathbf{x}_1) \geq 7\eta + 37$ . Ce qui démontre la double inégalité (14.2) pour tout  $i, j$  dans  $\{1, \dots, m\}$ .

Finalement, nous remarquons que la double inégalité (14.2) (qu'on vient de démontrer) est équivalente à la double inégalité :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{h(\mathbf{x}_j)}{\widehat{h}(\mathbf{x}_j)} \leq \frac{h(\mathbf{x}_i)}{\widehat{h}(\mathbf{x}_i)} \leq \sqrt{2} \frac{h(\mathbf{x}_j)}{\widehat{h}(\mathbf{x}_j)}.$$

Le produit membre à membre de cette dernière avec (14.1) (déjà démontrée ci-dessus) nous amène à l'inégalité (14.3) et achève cette démonstration. ■

**Lemme 14.4** *Sous les hypothèse du lemme 14.3 on a :*

- 1)  $\forall i \in \{1, \dots, m-1\} : a_i \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha}},$
- 2)  $\forall i \in \{1, \dots, m\} : a_i \geq 7^{m-i} \geq 7(m-i),$
- 3)  $\forall i \in \{2, \dots, m\} : a_{i-1} \geq 7a_i,$
- 4)  $a_1^2 + \dots + a_m^2 \leq (1 + 1/48)a_1^2$  et
- 5)  $m-1 \leq (1 + 1/48)\alpha a_1^2.$

**Démonstration.**— • Démontrons 1) : soit  $i \in \{1, \dots, m-1\}$ . On a :  $a_i := \lfloor \frac{|x_m|}{|x_i|} \rfloor > \frac{|x_m|}{|x_i|} - 1$ . Comme d'après les hypothèses  $H_1$  on a :  $\frac{|x_m|}{|x_i|} \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + 1$ , c'est-à-dire :  $\frac{|x_m|}{|x_i|} - 1 \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$  alors  $a_i > \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ . Ce qui démontre 1) du lemme 14.4.

• Démontrons 2) : soit  $i \in \{1, \dots, m\}$ . D'après l'hypothèse  $H_1$ , affirmant : «  $\forall j \in \{2, \dots, m\}, |x_j| \geq 7 |x_{j-1}|$  », on a  $|x_m| \geq 7^{m-i} |x_i|$ , c'est-à-dire :  $\frac{|x_m|}{|x_i|} \geq 7^{m-i}$ . En prenant les parties entières pour cette dernière inégalité on a finalement  $a_i \geq 7^{m-i}$ . Par ailleurs la minoration :  $7^{m-i} \geq 7(m-i)$  est claire. D'où s'ensuit 2) du lemme 14.4.

• Démontrons 3) : Soit  $i \in \{2, \dots, m\}$ . D'après l'hypothèse  $H_1$  on a :  $|x_i| \geq 7 |x_{i-1}|$ ; d'où  $\frac{|x_m|}{|x_{i-1}|} \geq 7 \frac{|x_m|}{|x_i|} \geq 7 \lfloor \frac{|x_m|}{|x_i|} \rfloor = 7a_i$ . En prenant les parties entières des deux membres de l'inégalité  $\frac{|x_m|}{|x_{i-1}|} \geq 7a_i$  on a finalement :  $a_{i-1} \geq 7a_i$  ce qui démontre 3) du lemme 14.4.

• Démontrons 4) : d'après 3) -qu'on vient de démontrer- on a :

$$a_1 \geq 7a_2 \geq 7^2a_3 \geq \dots \geq 7^{i-1}a_i \geq \dots \geq 7^{m-1}a_m$$

donc :

$$a_1^2 + \dots + a_m^2 \leq \left(1 + \frac{1}{49} + \frac{1}{49^2} + \dots + \frac{1}{49^{m-1}}\right) a_1^2 \leq \left(1 + \frac{1}{48}\right) a_1^2$$

ce qui démontre 4) du lemme 14.4.

• Démontrons 5) : d'après 1) -déjà démontré- on a pour tout  $i$  dans  $\{1, \dots, m-1\}$  l'inégalité  $1 \leq \alpha a_i^2$  d'où :

$$\sum_{i=1}^{m-1} 1 \leq \sum_{i=1}^{m-1} \alpha a_i^2$$

c'est-à-dire :  $m-1 \leq \alpha (a_1^2 + \dots + a_{m-1}^2).$

comme  $a_1^2 + \dots + a_{m-1}^2 \leq a_1^2 + \dots + a_m^2 \leq (1 + 1/48)a_1^2$  d'après 4) -qu'on vient de démontrer- on en déduit finalement qu'on a  $m-1 \leq (1 + 1/48)\alpha a_1^2$  ce qui démontre 5) du lemme 14.4 et achève cette démonstration. ■

**Lemme 14.5** *Sous les hypothèses du lemme 14.3 on a, pour tout  $i \in \{1, \dots, m-1\}$  :*

$$\widehat{h}(a_i \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_m) \leq \alpha \left( a_1^2 \widehat{h}(\mathbf{x}_i) + \widehat{h}(\mathbf{x}_m) \right).$$

**Démonstration.**— Pour tout  $i \in \{1, \dots, m-1\}$  on écrit :

$$\begin{aligned} |a_i \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_m|^2 &= a_i^2 |\mathbf{x}_i|^2 + |\mathbf{x}_m|^2 - 2a_i \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_m \rangle \\ &= (a_i |\mathbf{x}_i| - |\mathbf{x}_m|)^2 + 2a_i (|\mathbf{x}_i| \cdot |\mathbf{x}_m| - \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_m \rangle) \\ &\leq |\mathbf{x}_i|^2 + 2a_i \frac{\alpha}{4} |\mathbf{x}_i| \cdot |\mathbf{x}_m| \\ &\leq |\mathbf{x}_i|^2 + \frac{\alpha}{2} a_i |\mathbf{x}_i| \cdot |\mathbf{x}_m| \\ &\leq \frac{|\mathbf{x}_m|^2}{a_i^2} + \alpha \frac{a_i(a_i + 1)}{2} |\mathbf{x}_i|^2 \\ &\leq \alpha \left( a_i^2 |\mathbf{x}_i|^2 + |\mathbf{x}_m|^2 \right) \end{aligned}$$

où, pour l'obtention de cette série d'inégalités, on a utilisé : la première inégalité de l'hypothèse  $H_1$  qui entraîne  $|\mathbf{x}_i| \cdot |\mathbf{x}_m| - \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_m \rangle \leq \frac{\alpha}{4} |\mathbf{x}_i| \cdot |\mathbf{x}_m|$  ;  $a_i := \lceil \frac{|\mathbf{x}_m|}{|\mathbf{x}_i|} \rceil$  qui entraîne  $\frac{|\mathbf{x}_m|}{|\mathbf{x}_i|} - 1 < a_i \leq \frac{|\mathbf{x}_m|}{|\mathbf{x}_i|}$  ; l'assertion 1) du lemme 14.4 qui entraîne :  $\frac{1}{a_i^2} < \alpha$  et enfin la majoration triviale  $\frac{a_i(a_i+1)}{2} \leq a_i^2$ . Ceci achève cette démonstration. ■

Avant de passer aux autres lemmes, il est intéressant de remarquer que le lemme 14.3 est vrai même si on se restreint seulement aux troisième et quatrième inégalités de l'hypothèse  $H_1$ . Le lemme 14.4 est vrai même si on se restreint seulement aux deuxième et troisième inégalités de l'hypothèse  $H_1$  et le lemme 14.5 reste valable même si on se restreint seulement aux première et deuxième inégalités de l'hypothèse  $H_1$ .

Le lemme qui suit est utilisé dans le §6 pour affirmer :  $\text{card}(T_\delta) = (1+o(\delta))\text{vol}(T_\delta)$ .

**Lemme 14.6** *Soient  $\delta$  un entier positif,  $r_1, \dots, r_n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) des entiers strictement positifs et  $T$  un entier positif satisfaisant :*

$$T \leq \frac{1}{r_1} + \dots + \frac{1}{r_n}.$$

*Alors, l'ensemble :*

$$C := \left\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n / \frac{\alpha_1}{r_1} + \dots + \frac{\alpha_n}{r_n} \leq \delta \right\}$$

*est de cardinal encadré par :*

$$r_1 \dots r_n \binom{\delta + T}{n} \leq \text{card}(C) \leq r_1 \dots r_n \binom{\delta + n}{n}.$$

**Démonstration.**— L'idée consiste à encadrer  $C$  (au sens de l'inclusion) par deux ensembles de cardinaux faciles à calculer. Les deux ensembles dont il s'agit ici sont du type de la famille d'ensembles  $C_R$  ( $R \in \mathbb{N}$ ) définis par :

$$C_R := \left\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n / \left\lceil \frac{\alpha_1}{r_1} \right\rceil + \dots + \left\lceil \frac{\alpha_n}{r_n} \right\rceil \leq R \right\},$$

où  $\lceil \cdot \rceil$  désigne la partie entière. On a ainsi la double inclusion :

$$C_{\delta-n+T} \subset C \subset C_\delta.$$

En effet, l'inclusion  $C \subset C_\delta$  est immédiate et l'inclusion  $C_{\delta-n+T} \subset C$  s'obtient en remarquant que pour tout rationnel positif  $p/q$  ( $p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}^*$ ) on a :  $p/q \leq \lceil p/q \rceil + 1 - 1/q$ . La double inclusion précédente entraîne pour  $\text{card}(C)$  l'encadrement :

$$\text{card}(C_{\delta-n+T}) \leq \text{card}(C) \leq \text{card}(C_\delta). \quad (14.6)$$

Par ailleurs, nous affirmons que pour tout entier positif  $R$ , le cardinal de l'ensemble  $C_R$  vaut exactement :

$$\text{card}(C_R) = r_1 \dots r_n \binom{R+n}{n}.$$

En effet, un élément  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  de  $C_R$  est forcément une solution d'un système :

$$\begin{cases} \left\lceil \frac{\alpha_1}{r_1} \right\rceil = x_1 \\ \vdots \\ \left\lceil \frac{\alpha_n}{r_n} \right\rceil = x_n \end{cases} \quad (\Xi)$$

pour un certain  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n$  satisfaisant :  $x_1 + \dots + x_n \leq R$ . Comme l'ensemble des  $(x_1, \dots, x_n)$  de  $\mathbb{N}^n$  satisfaisant  $x_1 + \dots + x_n \leq R$  est de cardinal exactement  $\binom{R+n}{n}$  et que pour un tel point  $(x_1, \dots, x_n)$ , l'ensemble des solutions du système  $(\Xi)$  est exactement  $r_1 \dots r_n$  (car ces solutions sont :  $(r_1 x_1 + i_1, \dots, r_n x_n + i_n) / 0 \leq i_1 \leq r_1 - 1, \dots, 0 \leq i_n \leq r_n - 1$ , et sont donc au nombre de  $r_1 \dots r_n$ ) alors le cardinal de  $C_R$  est effectivement  $r_1 \dots r_n \binom{R+n}{n}$ . En particulier :

$$\text{card}(C_{\delta-n+T}) = r_1 \dots r_n \binom{\delta+T}{n} \quad \text{et} \quad \text{card}(C_\delta) = r_1 \dots r_n \binom{\delta+n}{n}.$$

Ce qui conclut, d'après (14.6), cette démonstration. ■

**Remarque 14.7** Lorsque  $r_1 = \dots = r_n = 1$ , on peut prendre  $T = n$  et dans ce cas le lemme 14.6 est précis et on retrouve le fait que  $\text{card}\{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n / \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq \delta\} = \binom{\delta+n}{n} \quad \forall \delta \in \mathbb{N}$ .

**Lemme 14.8** Soient  $E$  la courbe elliptique du §2,  $\mathbf{x}$  un point de  $E(K)$  représenté dans  $\mathbb{P}_2$  par le système de coordonnées projectives  $\underline{x} = (x, 1, z) \in K^3$ ,  $v$  une place de  $K$  et  $\varepsilon$  un réel strictement positif. Supposons qu'on a :

$$\text{dist}_v(\mathbf{x}, \mathbf{0}) < e^{-2m_v - c_v}, \quad (*)$$

alors on a :

• si  $v$  est finie :

$$\max(|x|_v, |z|_v) < \min\left\{1, \frac{1}{|g_2|_v}, \frac{1}{|g_3|_v}\right\} \quad \text{et} \quad |\Delta(\underline{x})|_v = 1$$

• et si  $v$  est infinie :

$$\max(|x|_v, |z|_v) < e^{-16} \min\left\{1, \frac{1}{|g_2|_v}, \frac{1}{|g_3|_v}\right\}, \quad |\Delta(\underline{x})|_v > \frac{1}{\sqrt{e}}$$

et pour tout entier positif  $d$  :

$$\sum_{\substack{\underline{\alpha} \in \mathbb{N}^3 \\ |\underline{\alpha}|=d}} |\underline{x}^{\underline{\alpha}}|_v \leq e.$$

**Démonstration.**— D'après la propriété *ii*) du §2 pour la distance  $\text{dist}_v$ , l'hypothèse  $(*)$  entraîne qu'on a :

$$\text{dist}_v(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \max(|x|_v, |z|_v)$$

et par conséquent on a :

$$\max(|x|_v, |z|_v) < e^{-2m_v - c_v}.$$

Cette inégalité entraîne bien les estimations du lemme 14.8 concernant la quantité  $\max(|x|_v, |z|_v)$  puisqu'on a :  $e^{-2m_v} = M_v^{-2} \leq M_v^{-1} = \min\{1, 1/|g_2|_v, 1/|g_3|_v\}$ . Démontrons maintenant -en distinguant les deux cas “ $v$  finie” et “ $v$  infinie”- l'assertion du lemme 14.8 pour  $|\Delta(\underline{x})|_v$ . On a  $\Delta(\underline{x}) = 3g_3 z^2 + 2g_2 x z + 1$ .

1<sup>er</sup> cas (si  $v$  est finie) :

Dans ce cas on a :

$$|\Delta(\underline{x})|_v \leq \max(1, |3g_3 z^2 + 2g_2 x z|_v),$$

où cette dernière inégalité devient une égalité lorsque  $|3g_3z^2 + 2g_2xz|_v < 1$ . Or, c'est bien le cas dans notre situation. En effet, on a :

$$\begin{aligned} |3g_3z^2 + 2g_2xz|_v &= |z|_v \cdot |3g_3z + 2g_2x|_v \\ &\leq |3g_3z + 2g_2x|_v \quad (\text{car } |z|_v < 1) \end{aligned}$$

puis :

$$\begin{aligned} |3g_3z^2 + 2g_2xz|_v &\leq \max(|3g_3z|_v, |2g_2x|_v) \\ &\leq \max(|g_3|_v \cdot |z|_v, |g_2|_v \cdot |x|_v) \\ &< 1 \quad \left( \text{car } |z|_v < \frac{1}{|g_3|_v} \text{ et } |x|_v < \frac{1}{|g_2|_v} \right). \end{aligned}$$

D'où :  $|\Delta(\underline{x})|_v = 1$ .

2<sup>ième</sup> cas (si  $v$  est infinie) :

Pour ce deuxième cas on a :

$$|\Delta(\underline{x})|_v \geq 1 - |3g_3z^2 + 2g_2xz|_v.$$

Or :

$$\begin{aligned} |3g_3z^2 + 2g_2xz|_v &= |z|_v \cdot |3g_3z + 2g_2x|_v \\ &\leq |z|_v \cdot (3|g_3|_v \cdot |z|_v + 2|g_2|_v \cdot |x|_v) \\ &\leq e^{-16} (3e^{-16} + 2e^{-16}) \\ &\leq 5e^{-32} \\ &< 1 - \frac{1}{\sqrt{e}}. \end{aligned}$$

D'où alors :  $|\Delta(\underline{x})|_v > \frac{1}{\sqrt{e}}$ .

Finalement, pour achever la démonstration du lemme 14.8, il ne reste qu'à vérifier que dans ce deuxième cas ( $v$  infinie), pour tout entier positif  $d$  on a  $\sum_{|\underline{\alpha}|=d} |\underline{x}^{\underline{\alpha}}|_v \leq e$ . En effet, on a pour tout  $d \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} \sum_{\underline{\alpha} \in \mathbb{N}^3, |\underline{\alpha}|=d} |\underline{x}^{\underline{\alpha}}|_v &= \sum_{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = d} |x|_v^{\alpha_0} |z|_v^{\alpha_2} \quad (\text{avec } (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) := \underline{\alpha}) \\ &= \sum_{\alpha_0 + \alpha_2 \leq d} |x|_v^{\alpha_0} |z|_v^{\alpha_2} \\ &\leq \sum_{\alpha_0=0}^{\infty} \sum_{\alpha_2=0}^{\infty} |x|_v^{\alpha_0} |z|_v^{\alpha_2} \\ &\leq \left( \sum_{\alpha_0=0}^{\infty} |x|_v^{\alpha_0} \right) \left( \sum_{\alpha_2=0}^{\infty} |z|_v^{\alpha_2} \right) \\ &\leq \frac{1}{1 - |x|_v} \cdot \frac{1}{1 - |z|_v} \\ &\leq \left( \frac{1}{1 - e^{-16}} \right)^2 \quad (\text{car } |x|_v < e^{-16} \text{ et } |z|_v < e^{-16}) \\ &< e. \end{aligned}$$

La démonstration du lemme 14.8 est ainsi complète.  $\blacksquare$

**Lemme 14.9** Soit  $a$  un réel positif  $> a_0 := 15788$  et  $f$  une fonction réelle sur  $[2, +\infty[$  définie par :

$$f(x) := (2904x)^x a^{\frac{x}{x-1}}.$$

Alors  $f$  atteint son minimum en un point unique  $\xi = \xi(a)$  vérifiant l'encadrement :

$$\sqrt{\frac{2 \log a}{\log\left(\frac{\log a}{\log \log a}\right) + 21}} + 1 < \xi < \sqrt{\frac{2 \log a}{\log\left(\frac{\log a}{\log \log a}\right) + 16}} + 1.$$

De plus en désignant par  $m_0$  l'entier positif :

$$m_0 := \left\lceil \sqrt{\frac{2 \log a}{\log \log a - \log \log \log a + 16}} + 2 \right\rceil,$$

où  $[\cdot]$  désigne la partie entière ( $m_0$  minimise donc « presque » la fonction  $f$ ), on a :

$$f(m_0) \leq a^{1 + \frac{183}{\log \log a}}.$$

**Démonstration.**— Minimiser  $f$  revient à minimiser son logarithme népérien :

$$g(x) := \log f(x) = x(\log x + \log 2904) + \frac{x}{x-1} \log a.$$

Etudions les variations de  $g$  : On a  $\forall x \in [2, +\infty[ : g'(x) = \log x + 1 + \log 2904 - \frac{\log a}{(x-1)^2}$ . Il est clair que  $g'$  est strictement croissante sur  $[2, +\infty[$  et, puisque on a :  $g'(2) = \log 2 + 1 + \log 2904 - \log a = \log\left(\frac{5808e}{a}\right) < 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) = +\infty$ , alors, d'après le théorème de la bijection,  $g'$  réalise une bijection de  $[2, +\infty[$  sur  $[g'(2), +\infty[$ . D'où l'existence d'un unique  $\xi \in [2, +\infty[$  tel que  $g'(\xi) = 0$ . De plus,  $g'$  est strictement négative sur  $[2, \xi[$  et elle est strictement positive sur  $]\xi, +\infty[$ . Ce qui entraîne que la fonction  $g$  est strictement décroissante sur  $[2, \xi]$  et elle est strictement croissante sur  $[\xi, +\infty[$ , par conséquent  $g$  atteint son minimum en  $\xi$  et il en est de même pour  $f$  puisque  $f =: \exp(g)$ . Démontrer l'encadrement du lemme 14.9 pour  $\xi$  revient, d'après cette étude, à démontrer les deux inégalités :

$$g'\left(\sqrt{\frac{2 \log a}{\log \log a - \log \log \log a + 21}} + 1\right) < 0$$

et

$$g'\left(\sqrt{\frac{2 \log a}{\log \log a - \log \log \log a + 16}} + 1\right) > 0.$$

Commençons par démontrer la première, on a :

$$\begin{aligned}
& g' \left( \sqrt{\frac{2 \log a}{\log \log a - \log \log \log a + 21}} + 1 \right) \\
&= \log \left( \sqrt{\frac{2 \log a}{\log \log a - \log \log \log a + 21}} + 1 \right) + 1 + \log 2904 \\
&\quad - \frac{\log \log a - \log \log \log a + 21}{2} \\
&\leq \log \left( \sqrt{\frac{2 \log a}{\log \log a - \log \log \log a + 21}} \right) \\
&\quad + \sqrt{\frac{\log \log a - \log \log \log a + 21}{2 \log a}} + 1 + \log 2904 \\
&\quad - \frac{1}{2} \log \left( \frac{\log a}{\log \log a} \right) - \frac{21}{2} \\
&\leq \frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2} \log \log a - \frac{1}{2} \log(\log \log a - \log \log \log a + 21) \\
&\quad + 1 + \log 2904 - \frac{21}{2} + \sqrt{\frac{\log \log a - \log \log \log a + 21}{2 \log a}} \\
&\quad - \frac{1}{2} \log \left( \frac{\log a}{\log \log a} \right) \\
&\leq \frac{1}{2} \log \left( \frac{\log \log a}{\log \log a - \log \log \log a + 21} \right) \\
&\quad + \sqrt{\frac{\log \log a - \log \log \log a + 21}{2 \log a}} + \frac{1}{2} \log 2 + \log 2904 - \frac{19}{2} \\
&\leq \frac{1}{2} \log \left( \frac{e^{22}}{e^{22} - 1} \right) + \sqrt{\frac{\log \log a_0 - \log \log \log a_0 + 21}{2 \log a_0}} \\
&\quad + \frac{1}{2} \log 2 + \log 2904 - \frac{19}{2} \\
&< 0.
\end{aligned}$$

L'avant dernière inégalité provient de :

$$\begin{aligned}
\frac{e^{22} - 1}{e^{22}} \log \log a &\leq \log \log a - \log \log \log a + 21 \\
&\leq \frac{\log \log a_0 - \log \log \log a_0 + 21}{\log a_0} \log a,
\end{aligned}$$

qui se montre par une simple étude de fonctions (en  $a$ ) en tenant compte du fait  $a > a_0 := 15788$ . La première inégalité est alors démontrée.

Montrons maintenant la deuxième inégalité, on a :

$$\begin{aligned}
& g' \left( \sqrt{\frac{2 \log a}{\log \log a - \log \log \log a + 16}} + 1 \right) \\
&= \log \left( \sqrt{\frac{2 \log a}{\log \log a - \log \log \log a + 16}} + 1 \right) + 1 + \log 2904 \\
&\quad - \frac{\log \log a - \log \log \log a + 16}{2} \\
&> \log \left( \sqrt{\frac{2 \log a}{\log \log a - \log \log \log a + 16}} \right) + 1 + \log 2904 \\
&\quad - \frac{1}{2} \log \log a + \frac{1}{2} \log \log \log a - 8 \\
&\geq \frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2} \log \log a - \frac{1}{2} \log(\log \log a - \log \log \log a + 16) \\
&\quad - \frac{1}{2} \log \log a + \frac{1}{2} \log \log \log a + \log 2904 - 7 \\
&\geq \frac{1}{2} \log \left( \frac{\log \log a}{\log \log a - \log \log \log a + 16} \right) + \frac{1}{2} \log 2 + \log 2904 - 7 \\
&\geq \frac{1}{2} \log \left( \frac{\log \log a_0}{\log \log a_0 - \log \log \log a_0 + 16} \right) + \frac{1}{2} \log 2 + \log 2904 - 7 \\
&> 0.
\end{aligned}$$

L'avant dernière inégalité se montre en étudiant la fonction :

$$a \mapsto \frac{\log \log a}{\log \log a - \log \log \log a + 16}.$$

Ceci achève la démonstration de la deuxième inégalité et achève ainsi la démonstration de la première partie du lemme.

Montrons maintenant la deuxième partie du lemme 14.9. En posant :

$$t := \sqrt{\frac{2 \log a}{\log \log a - \log \log \log a + 16}},$$

on a  $m_0 = [t + 2]$  (où  $[.]$  désigne la partie entière), d'où l'encadrement :

$$t + 1 < m_0 \leq t + 2$$

pour l'entier  $m_0$ .

De  $a > a_0$  on déduit, grâce à une simple étude de fonction, qu'on a :

$$t > \sqrt{\frac{2 \log a_0}{\log \log a_0 - \log \log \log a_0 + 16}} > 1.$$

Par ailleurs, la première partie du présent lemme (déjà démontrée) affirme qu'on a  $t + 1 > \xi$ , ce qui entraîne qu'on a aussi  $m_0 > \xi$ , puis, d'après la croissance stricte de la fonction  $g'$ , qu'on a  $g'(m_0) > g'(\xi) = 0$ , c'est-à-dire :

$$g'(m_0) > 0.$$

Pour majorer sans peine le réel positif  $g(m_0)$ , nous remarquons que la fonction  $g$  satisfait l'équation différentielle :

$$x(x-1)y' + y = x^2(\log x + 1 + \log 2904) - x.$$



On a ainsi :

$$\begin{aligned}
g(m_0) &= m_0^2 \log m_0 + (1 + \log 2904)m_0^2 - m_0 - (m_0^2 - m_0)g'(m_0) \\
&< m_0^2 \log m_0 + 9m_0^2 - m_0 && (\text{car } g'(m_0) > 0) \\
&< (t+2)^2 \log(t+2) + 9(t+2)^2 - (t+2) && (\text{car } m_0 \leq t+2) \\
&< (t^2 + 4t + 4)(\log t + \frac{2}{t}) + 9t^2 + 35t + 34 \\
&< t^2 \log t + 9t^2 + 4t \log t + 37t + 4 \log t + 42 + \frac{8}{t} \\
&< t^2 \log t + 99t^2 && (\text{en utilisant l'inégalité : } \log x \leq \frac{x}{e}, \forall x > 0).
\end{aligned}$$

En fonction de  $a$ , les calculs donnent :

$$t^2 \log t + 99t^2 = \log a \cdot \left[ 1 + s(\log s + \log 2 + 182) \cdot \frac{1}{\log \log a} \right]$$

avec  $s := \frac{\log \log a}{\log \log a - \log \log \log a + 16} = t^2 \cdot \frac{\log \log a}{2 \log a}.$

Or, une simple étude de fonction montre qu'on a :

$$s := \frac{\log \log a}{\log \log a - \log \log \log a + 16} \leq \frac{e^{17}}{e^{17} - 1}.$$

D'où :

$$\begin{aligned}
t^2 \log t + 99t^2 &\leq \log a \cdot \left[ 1 + \frac{e^{17}}{e^{17} - 1} \left( \log \left( \frac{e^{17}}{e^{17} - 1} \right) + \log 2 + 182 \right) \frac{1}{\log \log a} \right] \\
&< \log a \cdot \left[ 1 + \frac{183}{\log \log a} \right].
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$g(m_0) \leq t^2 \log t + 99t^2 < \log a \cdot \left[ 1 + \frac{183}{\log \log a} \right].$$

D'où finalement :  $f(m_0) = \exp g(m_0) < a^{1 + \frac{183}{\log \log a}}$ , ce qui achève la démonstration du lemme 14.9. ■

**Corollaire 14.10** *Soit  $R$  l'expression définie au §11, c'est-à-dire :*

$$R(m) := c_1(2904m)^m a^{\frac{m}{m-1}} + c_2 m(2904m)^m a \quad (m \in \mathbb{N}_{\geq 2}),$$

avec  $c_1 := 55\eta + 272$ ,  $c_2 := \eta + 2 < \frac{c_1}{55}$  et  $a := \frac{1}{\varepsilon}$ . Sous l'hypothèse  $\varepsilon < \frac{1}{15788}$ , l'entier  $m_0$  défini dans le lemme 14.9 précédent minimise presque l'expression  $R$  et lui donne une valeur majorée par :

$$R(m_0) \leq 56(\eta + 5)a^{1 + \frac{183}{\log \log a}}.$$

**Démonstration.**— Le fait que  $m_0$  minimise presque  $R$  est dû simplement au fait que  $m_0$  minimise presque l'expression  $f(m) := (2904m)^m a^{\frac{m}{m-1}}$  (d'après le lemme 14.9 précédent) et au fait qu'on a  $m(2904m)^m a \ll f(m)$  lorsque l'entier  $m$  est proche de  $m_0$  (voir les calculs ci-dessous).

Montrons maintenant la majoration du corollaire 14.10 pour  $R(m_0)$ .

Comme  $c_2 < \frac{c_1}{55}$ , on a pour tout  $m \geq 2$  :  $R(m) \leq c_1 f(m)(1 + \frac{1}{55} m a^{-\frac{1}{m-1}})$ , en particulier, pour l'entier  $m_0$  on a :

$$R(m_0) \leq c_1 f(m_0) \left(1 + \frac{1}{55} m_0 a^{-\frac{1}{m_0-1}}\right).$$

D'une part, d'après le lemme 14.9 précédent on a :

$$f(m_0) < a^{1+\frac{183}{\log \log a}}$$

et d'autre part, en désignant par  $t$  le réel introduit dans la démonstration du lemme 14.9, on a :

$$m_0 a^{-\frac{1}{m_0-1}} \leq (t+2) a^{-\frac{1}{t+1}} < e^{-3}$$

où dans cette double inégalité, l'inégalité de gauche sort de l'encadrement  $t+1 < m_0 \leq t+2$  pour l'entier  $m_0$  et l'inégalité de droite est équivalente à l'inégalité  $\frac{\log a}{t+1} > \log(t+2) + 3$  laquelle se démontre en utilisant des estimations du type de celles déjà utilisées dans la démonstration du lemme 14.9 en tenant compte seulement du fait  $a > a_0$ .

D'où :

$$\begin{aligned} R(m_0) &\leq c_1 a^{1+\frac{183}{\log \log a}} (1 + e^{-3}/55) \\ &< (56\eta + 273) a^{1+\frac{183}{\log \log a}}, \end{aligned}$$

et a fortiori :  $R(m_0) < 56(\eta+5) a^{1+\frac{183}{\log \log a}}$ , ce qui achève cette démonstration. ■

**Lemme 14.11** *Soit  $a$  un réel  $\geq e^2$ ,  $r$  un entier  $\geq 1$  et  $q$  la fonction réelle sur  $[2, +\infty[$  définie par :*

$$q(x) := \left( x(x-1)(\log x + 9) + \frac{2}{r} \log a \cdot x \right) a^{\frac{x}{x-1}}.$$

*Alors, la valeur minimale de  $q$  sur  $[2, +\infty[$  vérifie :*

$$16(\log a)^2 a < \min_{x \in [2, +\infty[} q(x) < 2(\log a)^2 (\log \log a + 82) a.$$

*De plus, la valeur de  $q$  en l'entier  $m_1 := [\frac{\log a}{2} + 2]$  (où  $[\cdot]$  désigne la partie entière) est majorée par :*

$$q(m_1) \leq 2(\log a)^2 (\log \log a + 82) a.$$

**Démonstration.**— Il est clair qu'on a :

$$\forall x \geq 2 \quad q(x) \geq 9(x-1)^2 a^{\frac{x}{x-1}},$$

donc

$$\min_{x \in [2, +\infty[} q(x) \geq \min_{x \in [2, +\infty[} 9(x-1)^2 a^{\frac{x}{x-1}}.$$

Or, une simple étude de fonction montre que la fonction  $9(x-1)^2 a^{\frac{x}{x-1}}$  (sur  $[2, +\infty[$ ) atteint sa valeur minimale au point  $x = \frac{\log a}{2} + 1$  et cette dernière vaut  $\frac{9}{4} e^2 (\log a)^2 a > 16(\log a)^2 a$  ce qui entraîne qu'on a :

$$\min_{x \in [2, +\infty[} q(x) > 16(\log a)^2 a.$$

Par ailleurs, l'entier  $m_1 := [\frac{\log a}{2} + 2]$  vérifie l'encadrement  $\frac{\log a}{2} + 1 < m_1 \leq \frac{\log a}{2} + 2$  grâce auquel on obtient les deux majorations :

$$m_1(m_1-1)(\log m_1 + 9) + \frac{2}{r} \log a \cdot m_1 \leq \left( \frac{\log a}{2} \right)^2 (\log \log a + 82)$$

et 
$$a^{\frac{m_1}{m_1-1}} < e^2 a.$$

Ce qui donne 
$$\begin{aligned} q(m_1) &:= \left( m_1(m_1 - 1)(\log m_1 + 9) + \frac{2}{r} \log a \cdot m_1 \right) a^{\frac{m_1}{m_1-1}} \\ &< \frac{e^2}{4} (\log a)^2 (\log \log a + 82) a \\ &< 2(\log a)^2 (\log \log a + 82) a. \end{aligned}$$

La démonstration du lemme 14.11 se termine par la remarque banale :

$$\min_{x \in [2, +\infty[} q(x) \leq q(m_1) < 2(\log a)^2 (\log \log a + 82) a. \quad \blacksquare$$

**Corollaire 14.12** *Soit  $m$  un entier  $\geq 2$  (que nous prenons pour variable),  $r$  un entier  $\geq 1$  (que nous prenons pour paramètre),  $\varepsilon$  un réel positif  $\leq e^{-4/r}$  (que nous prenons pour paramètre aussi) et  $S$  l'expression définie par :*

$$S_{r,\varepsilon}(m) := 4\varepsilon^{-\frac{1}{2}} [m(m-1)(\log m + 9) + m|\log \varepsilon|] \left( 499\varepsilon^{-\frac{m}{2(m-1)}} \right)^r.$$

Alors,  $S$  (en tant que fonction en  $m$ ) atteint presque sa valeur minimale en l'entier  $m_1 := [\frac{r}{4} |\log \varepsilon| + 2]$  (où  $[\cdot]$  désigne la partie entière) et la valeur de  $S$  en  $m_1$  est majorée par :

$$S(m_1) \leq 2r^2 \varepsilon^{-\frac{1}{2}} |\log \varepsilon|^2 (\log r + \log |\log \varepsilon| + 82) \left( 499\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \right)^r.$$

**Démonstration.**— La fonction  $q$  définie au lemme 14.11 s'écrit pour  $a := \varepsilon^{-r/2}$  ( $a$  vérifie bien  $a \geq e^2$  puisque  $\varepsilon \leq e^{-4/r}$ ) :

$$q(x) = (x(x-1)(\log x + 9) + x|\log \varepsilon|) \varepsilon^{-\frac{rx}{2(x-1)}}.$$

Ainsi  $S(m)$  est un produit de  $q(m)$  avec une expression indépendante de  $m$ . En effet, on a :

$$S(m) = 4\varepsilon^{-1/2} (499)^r q(m).$$

Il s'ensuit que  $S(m)$  et  $q(m)$  atteignent leurs valeurs minimales au même point. Or, on sait, d'après le lemme 14.11, que  $q(m)$  atteint presque sa valeur minimale en  $m_1 := [\frac{\log a}{2} + 2] = [\frac{r}{4} |\log \varepsilon| + 2]$  et que :

$$\begin{aligned} q(m_1) &\leq 2(\log a)^2 (\log \log a + 82) a \\ &\leq 2 \left( \frac{r}{2} |\log \varepsilon| \right)^2 \left( \log \frac{r}{2} + \log |\log \varepsilon| + 82 \right) \varepsilon^{-\frac{r}{2}} \\ &\leq \frac{1}{2} r^2 (|\log \varepsilon|)^2 (\log r + \log |\log \varepsilon| + 82) \varepsilon^{-\frac{r}{2}}. \end{aligned}$$

Ainsi  $S(m)$  atteint aussi presque sa valeur minimale au même point  $m_1 := [\frac{r}{4} |\log \varepsilon| + 2]$  et :

$$\begin{aligned} S(m_1) &= 4\varepsilon^{-\frac{1}{2}} (499)^r q(m_1) \\ &\leq 2r^2 \varepsilon^{-\frac{1}{2}} (|\log \varepsilon|)^2 (\log r + \log |\log \varepsilon| + 82) \left( 499\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \right)^r. \end{aligned}$$

Ce qui termine cette démonstration.  $\blacksquare$

## Références

- [Ba] A. BAKER. The theory of linear forms in logarithms. dans *Transcendence theory: advances and applications*, édité par A. Baker et D. W. Masser, Academic Press, Orlando, Florida, (1977).
- [Be] D. BERTRAND. Lemmes de zéros et nombres transcendants, Séminaire Bourbaki, 38ème année, 1985-86, exposé n°652; *S.M.F. Astérisque*, vol. **145-146** (1987), p. 21-44.
- [Bom1] E. BOMBIERI. On G-functions. *Recent progress in analytic number theory*, vol. **2**. (Durham 1979). Edité par H. Halberstam et C. Hooley. Academic Press. (1981), p. 1-67.
- [Bom2] — The Mordell conjecture revisited. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, Série 4. **17** (1990), p. 615-640. — Erratum. *ibidem*, Série 6. **18** (1991), p. 473.
- [BVa] E. BOMBIERI & J. VAALER. - On Siegel's Lemma, *Invent. Math.* **73** (1983), p. 11-32.
- [Bou] N. BOURBAKI. Algèbre commutative, *Masson*, Paris, (1983). ??a J. W. S. CASSELS. An introduction to the geometry of numbers, *Springer-Verlag*, (1959).
- [Ch] M. CHARDIN. Une majoration de la fonction de Hilbert et ses conséquences pour l'interpolation algébrique, *Bull. Soc. Math. France*, **117** (1989), p. 305-318.
- [Da1] S. DAVID. Minorations de formes linéaires de logarithmes elliptiques, *Mém. Soc. Math. France*, (N.S.) n°62, édité par M. Waldschmidt, Tome **123**, Fascicule **3**, (1995). iv+143 pp.
- [Da2] — Points de petite hauteur sur les courbes elliptiques, *J. Number Theory*, **64** (1997), p. 104-129.
- [Da-Hi1] S. DAVID & N. HIRATA-KOHNO. Recent progress on linear forms in elliptic logarithms, in the proceedings of the conference *A Panorama in Number Theory*, édité par G. Wüstholz, Cambridge University Press, (2002), p. 26-37.
- [Da-Hi2] — Logarithmic Functions and Formal Groups of Elliptic Curves, prépublication.
- [Da-Hi3] — Linear Forms in Elliptic Logarithms, Prépublication.
- [Da-Ph] S. DAVID & P. PHILIPPON. - Minoration des hauteurs normalisées des sous-variétés de variétés abéliennes 2, *Comment. Math. Helv*, Vol **77**, Number 4 (2002), p. 639-700.
- [dD] T. DE DIEGO. Points rationnels sur les familles de courbes de genre au moins 2. *J. Number Theory*, **67** (1997), p. 85-114.
- [Dy] F. J. DYSON. The approximation to algebraic numbers by rationals, *Acta. Math*, **79** (1947), p. 225-40.
- [E] J. H. EVERTSE. An explicit version of Falting's product theorem and an improvement of Roth's lemma, *Acta Arith*, **73** (1995), p. 215-248.
- [Fa1] G. FALTINGS. Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern, *Invent. Math*, **73** (1983), p. 349-366.
- [Fa2] — Diophantine approximations on abelian varieties, *Annals of Math*, **133** (1991), p. 549-576.
- [Fa3] — The general case of S. Lang's conjecture, Barsotti Symposium in Algebraic Geometry (Abano Terme, 1991), *Perspect. Math*, 15. Academic Press. San Diego, (1994), p. 175-182.

- [Fa-Wü] G. FALTINGS & G. WÜSTHOLZ. Approximations on projective spaces, *Invent. Math.*, **116** (1994), p. 109-138.
- [Far] B. FARHI. Un lemme de Roth sur les groupes algébriques commutatifs, Prépublication, arXiv :math.NT/0603257, (2006).
- [Fe] R. FERRETTI. An effective version of Falting's product theorem, *Forum Math.*, **8** (1996), p. 401-427.
- [Fu] W. FULTON. Algebraic Curves, *Benjamin*, (1969).
- [Gau] ÉRIC GAUDRON. Mesure d'indépendance linéaire de logarithmes dans un groupe algébrique commutatif, Prépublication.
- [Gel] A. O. GELFOND. The approximation of algebraic numbers by algebraic numbers and the theory of transcendental numbers, *Uspehi Mathem. Nauk (N. S.)*, **4** (1949), p. 19-49; = *A. M. S. T.*, **2** (1962), p. 81-124.
- [G-S] R. GROSS & J. H. SILVERMAN.  $S$ -integer points on elliptic curves, *Pacific J. Math.*, **167** (1995), p. 263-288.
- [Ha] R. HARTSHORNE. Algebraic Geometry, *Springer-Verlag*, (1977).
- [Hin1] M. HINDRY. Autour d'une conjecture de Serge Lang, *Invent. Math.*, **94** (1988), p. 575-603.
- [Hin2] — Sur les conjectures de Mordell et Lang, *S.M.F. astérisque*, **209** (1992).
- [H-S1] M. HINDRY & J. H. SILVERMAN. The canonical heights and integral points on elliptic curves, *Invent. Math.*, **93** (1988), p. 419-450.
- [H-S2] — Diophantine Geometry : An introduction, *Springer*, (2000).
- [La1] S. LANG. Elliptic functions, *Addison-Wesley*, (1973).
- [La2] — Diophantine approximation on abelian varieties with complex multiplication, *Advances in Math.*, **17** (1975), p. 281-336.
- [La3] — Elliptic curves : Diophantine Analysis, *Springer-Verlag*, (1978).
- [La4] — Fundamentals of Diophantine Geometry, *Springer-Verlag*, (1983).
- [La5] — Number Theory III, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, **60**, *Springer*, (1991).
- [La-Ru] H. LANGE & W. RUPPERT. Complete systems of addition laws on abelian varieties, *Invent. Math.*, **79** (1985), p. 603-610.
- [Le] P. LELONG. Mesure de Mahler des polynômes et majorations de convexité, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **315** (1992), p. 139-142; Mesure de Mahler et calculs de constantes universelles pour les polynômes de  $N$  variables, *Math. Ann.*, **299** (1994), p. 673-695.
- [Mah] K. MAHLER. Lectures on transcendental numbers, *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. **546**. Springer-Verlag, Berlin-New York, (1976). xxi+254 pp.
- [Me] L. MEREL. Borne pour la torsion des courbes elliptiques sur les corps de nombres, *Invent. Math.*, **124** (1996), p. 437-449.
- [Mu1] D. MUMFORD. A remark on Mordell's conjecture, *Amer. J. Math.*, **87** (1965), p. 1007-1016.
- [Mu2] — Algebraic Geometry I, Complex projective Varieties, *Springer-Verlag*, (1976).
- [MW1] D. W. MASSER & G. WÜSTHOLZ. Fields of large transcendence degree generated by value of elliptic functions, *Invent. Math.*, **72** (1983), p. 407-464.
- [MW2] — Zero estimates on group varieties II, *Invent. Math.*, **80** (1985), p. 233-267.
- [Na] M. NAKAMAYE. Multiplicity estimates and the product theorem, *Bull. Soc. Math. France*, **123** (1995), p. 155-188.

- [Nor] D. G. NORTHCOTT. Lessons on rings, modules and multiplicities, *Cambridge Univ. Press*, (1968).
- [OT] T. OOE & J. TOP. On the Mordell-Weil rank of an abelian variety over a number field, *J. Pure Appl. Algebra*, **58** (1989), p. 261-265.
- [Ph1] P. PHILIPPON. Critères pour l'indépendance algébrique, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **64** (1986), p. 5-52.
- [Ph2] — Lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs, *Bull. Soc. Math. France*, **114** (1986), p. 355-383.
- [Ph3] — Nouveaux lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs, *Rocky Mountain J. Math*, Vol **26**, Number 3 (1996), p. 1069-1088.
- [Ph4] — Sur des hauteurs alternatives 2, *Ann. Inst. Fourier* (Grenoble) **44/4** (1994), p. 1043-1065 ; 3, *J. Math. Pures Appl*, **74/4** (1995), p. 345-365.
- [Ph5] — Quelques remarques sur des questions d'approximation diophantienne, *Bull. Austral. Math. Soc*, **59** (1999), p. 323-334.
- [R] K. F. ROTH. Rational approximation to algebraic numbers, *Mathematika*, **2** (1955), p. 1-20.
- [Ré1] G. RÉMOND. Décompte dans une conjecture de Lang. *Invent. Math*, **142** (2000), p. 513-545.
- [Ré2] — Inégalité de Vojta en dimension supérieure. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math*, **330** (2000), p. 5-10.
- [Ré3] — Inégalité de Vojta en dimension supérieure. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci*, (4) **29** (2000), p. 101-151.
- [Ré4] — Élimination multihomogène, in *Introduction to algebraic independence theory*, Y. V. Nesterenko & P. Philippon eds, *Lecture Notes in Math*, **1752**, Springer, (2001), p. 53-81.
- [Ré5] — Géométrie diophantienne multiprojective, in *Introduction to algebraic independence theory*, Y. V. Nesterenko & P. Philippon eds, *Lecture Notes in Math*, **1752**, Springer, (2001), p. 95-131.
- [Ré6] — Sur le théorème du produit, 21st Journées Arithmétiques (Rome, 2001), *J. Théor. Nombres Bordeaux*, **13** (2001), p. 287-302.
- [Ré7] — Inégalité de Vojta généralisée, tapuscrit, (2002).
- [Sch1] W. M. SCHMIDT. Simultaneous approximation to algebraic numbers by rationals, *Acta Math*, **125** (1970), p. 189-201.
- [Sch2] — The subspace theorem in diophantine approximation, *Compositio Math*, **69** (1989), p. 121-173.
- [Schli] H. P. SCHLICKWEI. The  $\mathbf{p}$ -adic Thue-Siegel-Roth-Schmidt theorem. *Arch. Math*, (Basel) **29** (1977), p. 267-270.
- [Se] J. P. SERRE. Algèbre locale et multiplicité, *Lecture Notes in Math*, **11** (1965).
- [Si] C. L. SIEGEL. Approximation algebraischer Zahlen, *M. Z*, **10** (1921), p. 173-213.
- [Si] J. H. SILVERMAN. A quantitative version of Siegel's theorem : Integral points on elliptic curves and Catalan curves, *J. Reine Angew. Math*, **378** (1987), p. 60-100.
- [Th] A. THUE. Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen, *J. M*, **135** (1909), p. 284-305.
- [V1] P. VOJTA. Siegel's theorem in the compact case, *Ann. of Math*, **133** (1991), p. 509-548.

- [V2] — Diophantine approximations and value distribution theory, *Lecture Notes in Math*, **1239** (Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1997).
- [Wa1] M. WALDSCHMIDT. Nombres transcendants, *Lectures Notes in Math*, **402** (1974).
- [Wa2] — Diophantine approximation on linear algebraic groups, Transcendence properties of the exponential function in several variables, *Springer-Verlag*, Berlin, (2000).
- [Wü] G. WÜSTHOLZ. multiplicity estimates on group varieties, *Ann. Math*, **129** (1989), p. 471-500.
- [Za-Sa] O. ZARISKI & P. SAMUEL. Commutative Algebra, Vol.1 et Vol.2, *Springer-Verlag*, (1960).
- [Zi-Sch] H. G. ZIMMER & S. SCHMITT. Height estimates for elliptic curves in short Weierstrass form over global fields and a comparison, *Archiv der Math*, **77** (2001), p. 22-31.